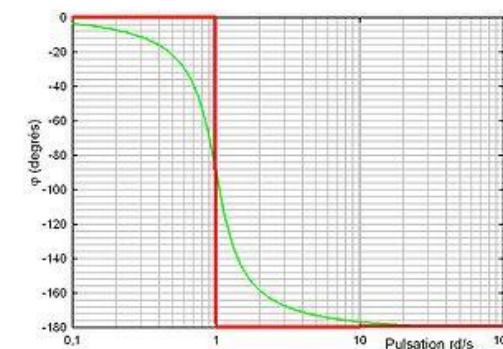
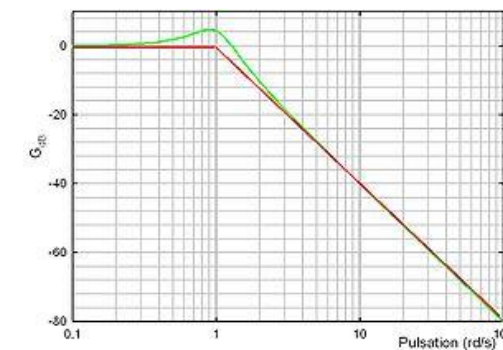
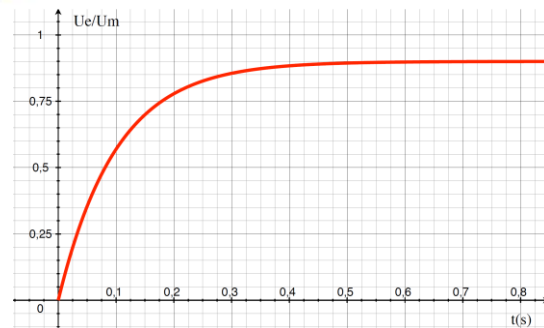
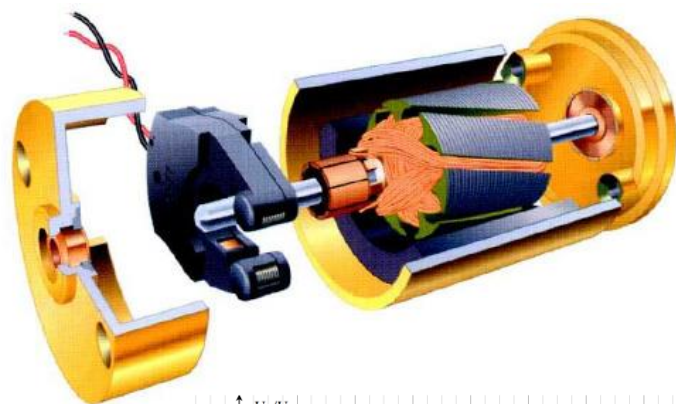
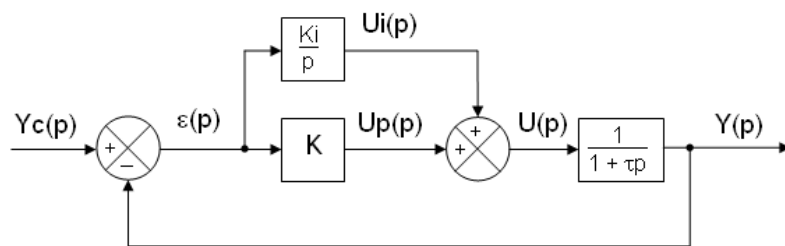


AUTOMATIQUE



3_Réponses temporelles

Compétences attendues :

- ✓ Etablir un modèle de comportement à partir d'une réponse temporelle ou fréquentielle. $\Leftrightarrow I$
- ✓ Déterminer la réponse temporelle. $\Leftrightarrow I$
- ✓ Simplifier un modèle.
- ✓ Vérifier la cohérence du modèle choisi en confrontant les résultats analytiques et/ou numériques aux résultats expérimentaux.
- ✓ Proposer une démarche permettant d'évaluer les performances des systèmes asservis.
- ✓ Déterminer les performances d'un système asservi.
- ✓ Analyser un algorithme. $\Leftrightarrow I$

Introduction

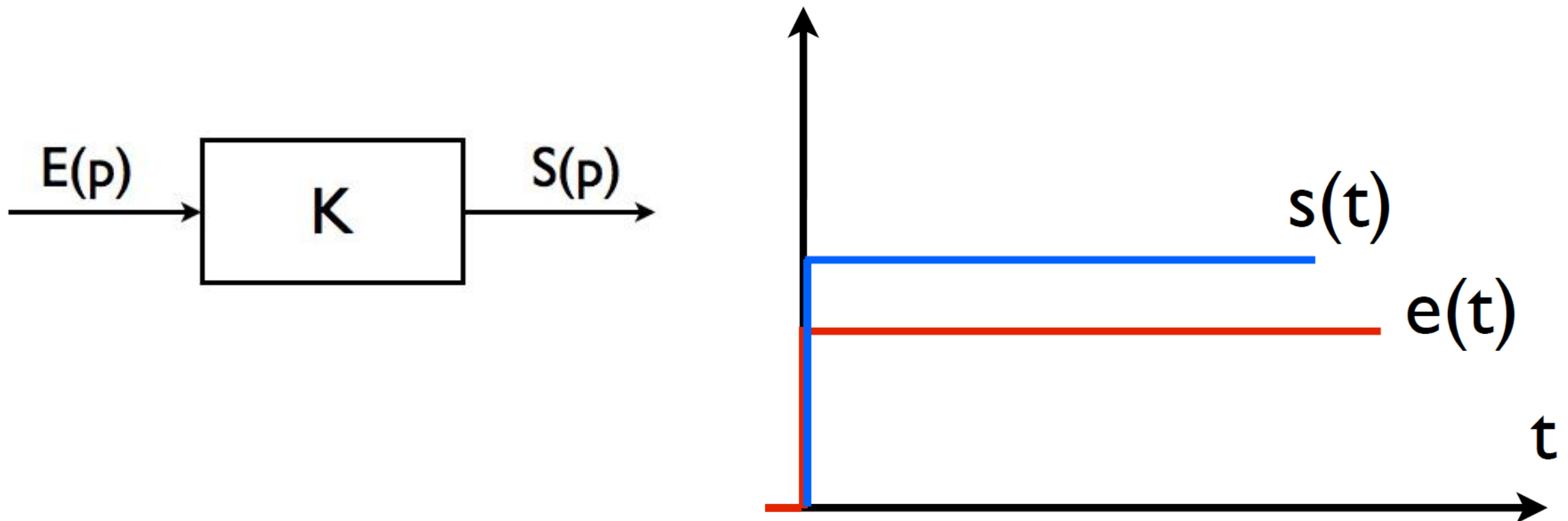
Il est intéressant de savoir reconnaître et interpréter ces résultats pour trois raisons :

- **Recaler un modèle de connaissance** d'un système à partir d'une mesure
- **Etablir un modèle de comportement** d'un système complexe à partir d'une mesure
- **Déterminer les performances** d'un système

Systèmes à action proportionnelle

La sortie est proportionnelle à l'entrée. La fonction de transfert s'écrit alors :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = K \text{ avec } K \in \mathbb{R}^+$$



Systèmes intégrateurs

L'équation d'un tel système dans le domaine temporel s'écrit : $\frac{ds(t)}{dt} = Ke(t)$.

On a donc comme fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{p}$$

Exemples :

- Volume de liquide contenu dans un réservoir (= intégrale du débit rentrant)
- Charge d'un condensateur (= intégrale du courant de charge)
- Vitesse d'un mobile (= intégrale de son accélération)
- Position d'un axe (=intégrale de sa vitesse)

Remarque : De la même façon que les retards purs, les intégrateurs purs sont toujours associés à une autre fonction de transfert.

Systèmes intégrateurs

Réponse impulsionnelle

On soumet le système à une impulsion de Dirac ($e(t) = \delta(t)$) $\rightarrow$ Laplace $\rightarrow E(p) = 1$.

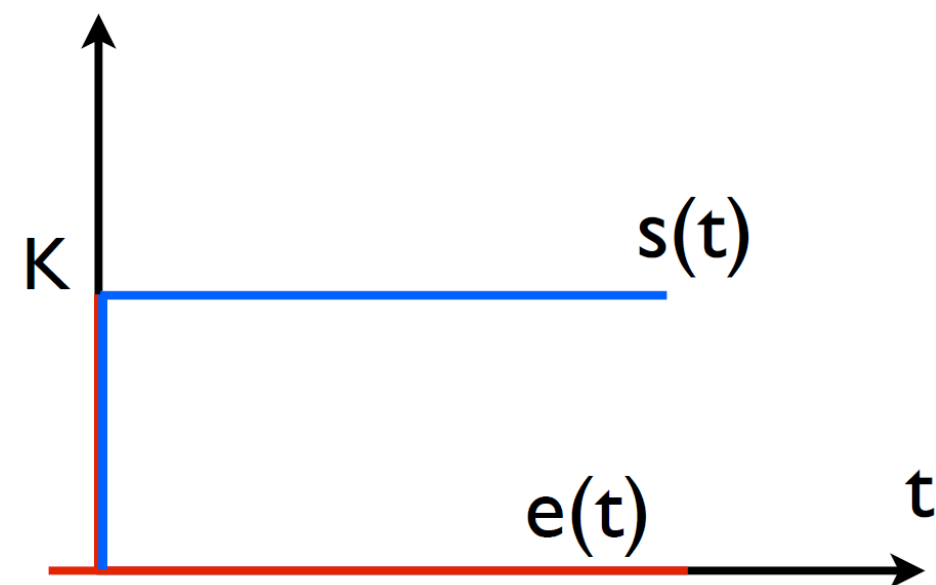
L'expression de la sortie dans le domaine de Laplace est alors :

$$S(p) = H(p) \cdot E(p) = \frac{K}{p} \cdot 1$$

On a donc

$$s(t) = K \cdot u(t)$$

La réponse impulsionnelle d'un système intégrateur est **un échelon**.



Systèmes intégrateurs

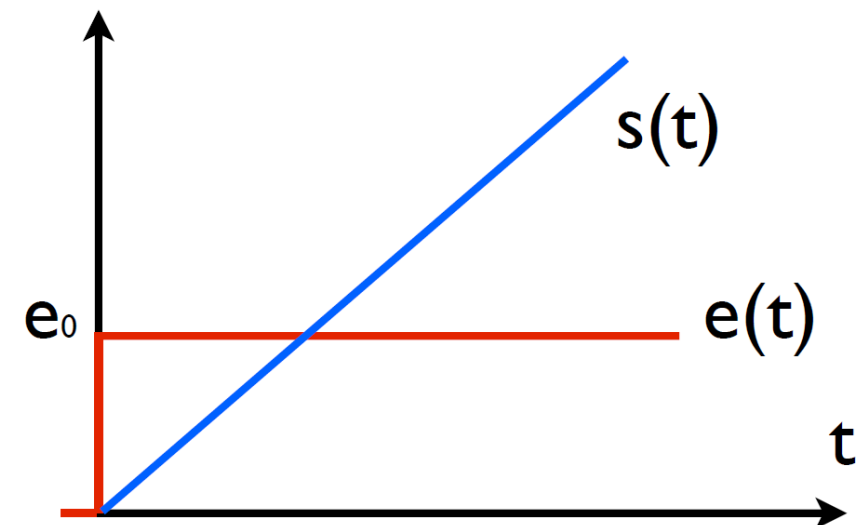
Réponse indicielle

$$e(t) = e_0 u(t) \longrightarrow E(p) = \frac{e_0}{p}$$

$$S(p) = H(p) \cdot E(p) = \frac{K}{p} \cdot \frac{e_0}{p}$$

On a donc $s(t) = K \cdot e_0 \cdot t \cdot u(t)$

La réponse indicielle d'un système intégrateur est **une rampe**.



Systèmes du premier ordre

Rappels

Système du 1^{er} ordre $\longrightarrow$ $\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K.e(t)$

Avec

- $K \rightarrow$ gain statique du système
- $\tau \rightarrow$ constante de temps du système

Laplace
+ Conditions d'Heaviside $\longrightarrow$ $(\tau p + 1).S(p) = K.E(p)$

Donc

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \tau p}$$

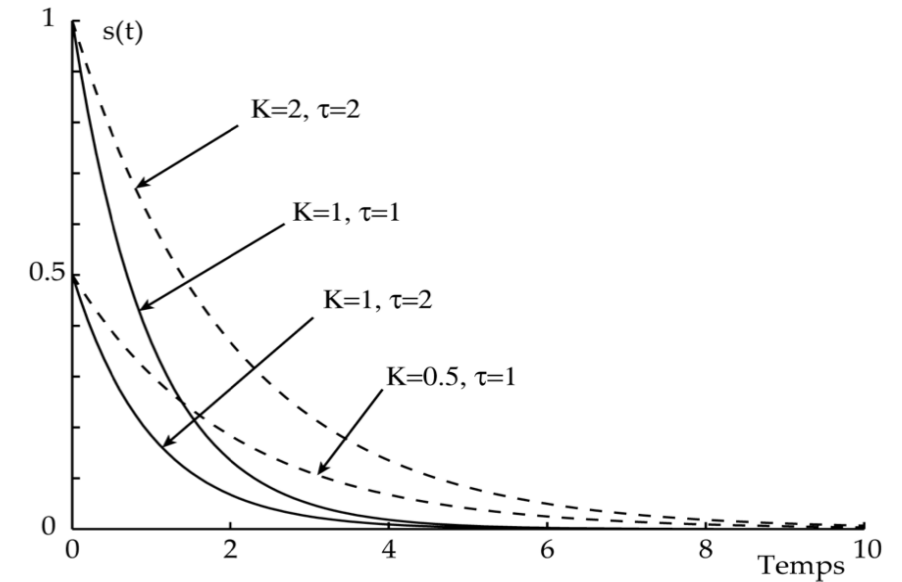
Systèmes du premier ordre

Réponse impulsionnelle

$$e(t) = \delta(t) \longrightarrow E(p) = 1$$

$$\text{Laplace} \longrightarrow S(p) = H(p) \cdot E(p) = \frac{K}{1+\tau p} \cdot 1$$

$$\text{Réponse temporelle} \longrightarrow s(t) = \frac{K}{\tau} e^{\frac{-t}{\tau}} u(t)$$



Systèmes du premier ordre

Réponse indicielle

$$e(t) = e_0 u(t) \longrightarrow E(p) = \frac{e_0}{p}$$

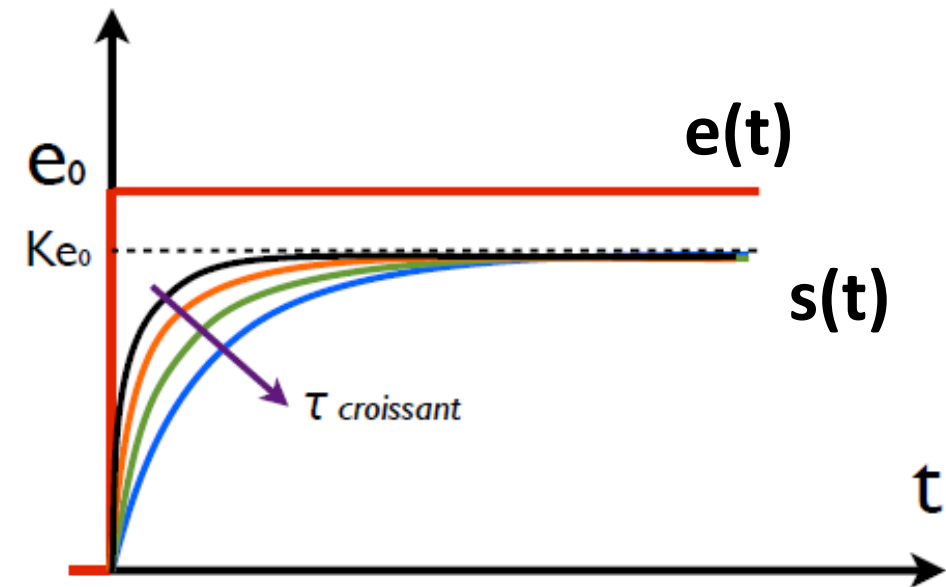
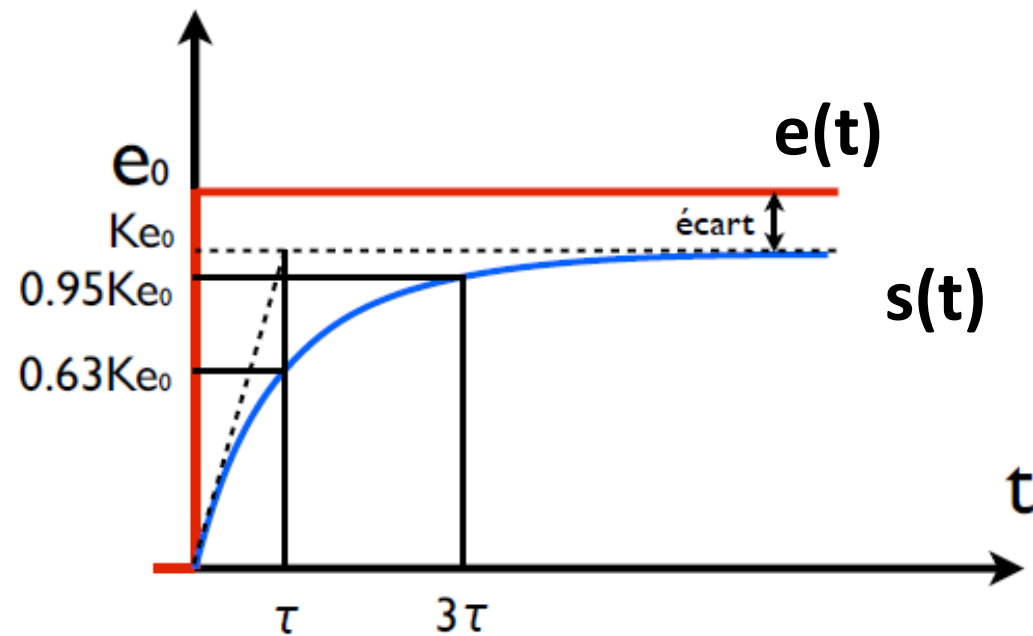
Démonstration

$$\text{Laplace} \longrightarrow S(p) = H(p) \cdot E(p) = \frac{K}{1+\tau p} \cdot \frac{e_0}{p}$$

$$\text{Réponse temporelle} \longrightarrow s(t) = K e_0 \left(1 - e^{\frac{-t}{\tau}} \right) \cdot u(t)$$

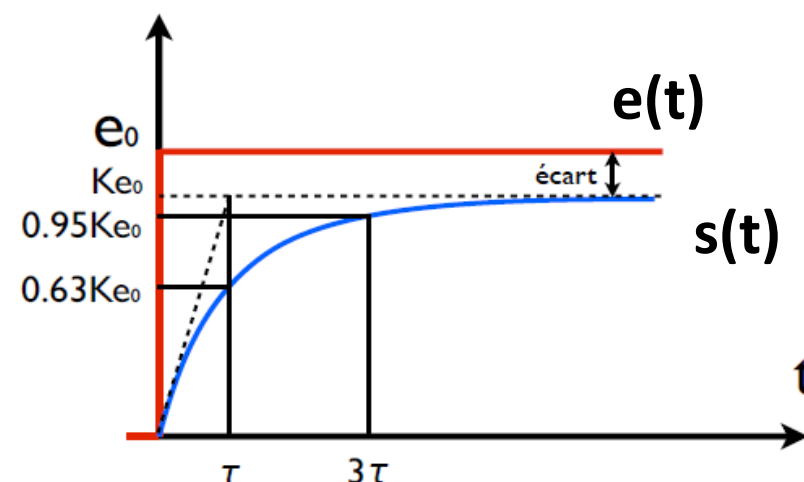
Systèmes du premier ordre

Réponse indicielle



Systèmes du premier ordre

Réponse indicielle



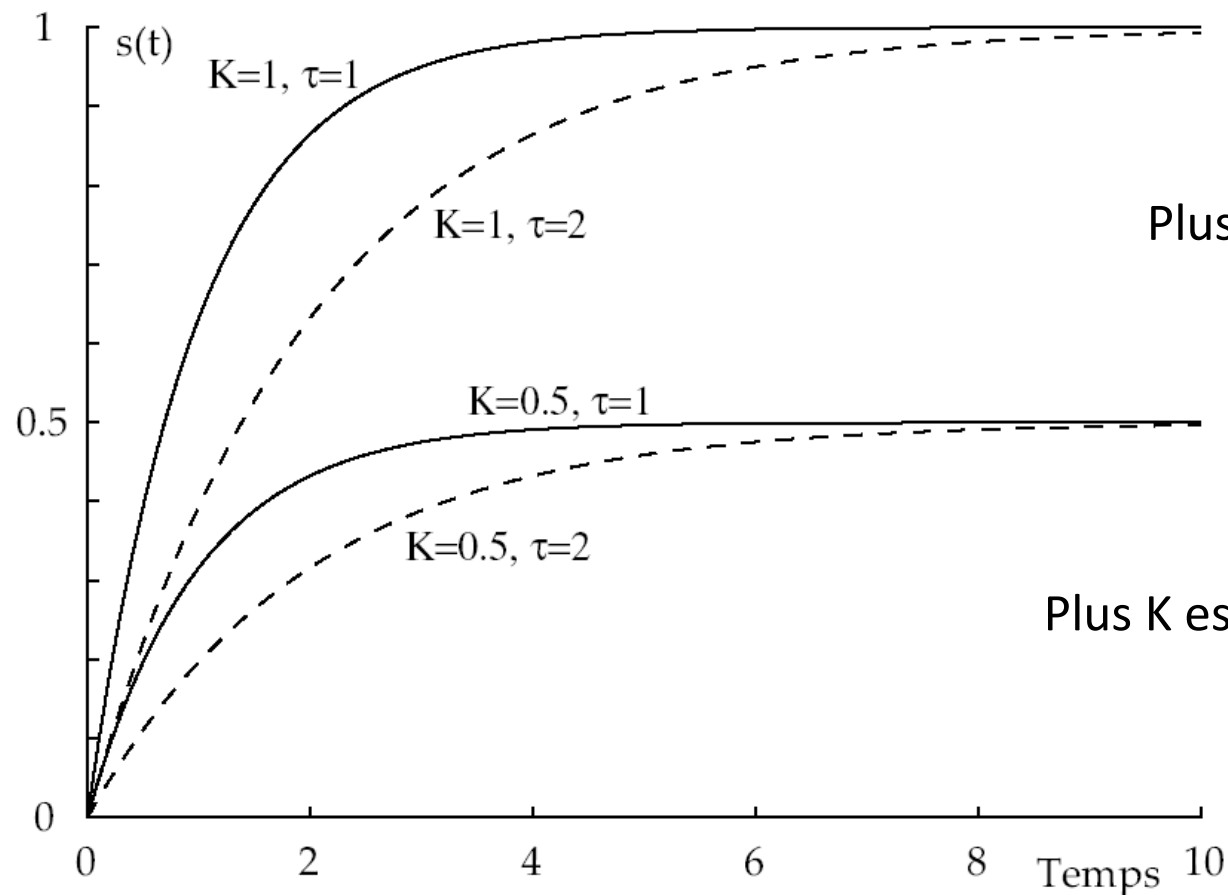
Propriétés remarquables des courbes :

- Pas de dépassement
- Gain statique $K \rightarrow$ comportement du système en régime permanent : $s_{\infty} = K \cdot e_0$
- Pente à l'origine non nulle : $\frac{Ke_0}{\tau}$
- Ecart statique (en utilisant le théorème de la valeur finale sur $S(p)$) : $\varepsilon_s = e_0(1 - K)$
Le système est précis si $K=1$
- Pour $t = \tau$, $s(t) = 63\% \cdot s_{\infty}$
- Pour $t = 3\tau$, $s(t) \cong s(t_{5\%}) = 95\% \cdot s_{\infty}$
- Plus τ est petit, plus le système est rapide

Systèmes du premier ordre

Réponse indicielle

Influence des paramètres caractéristiques



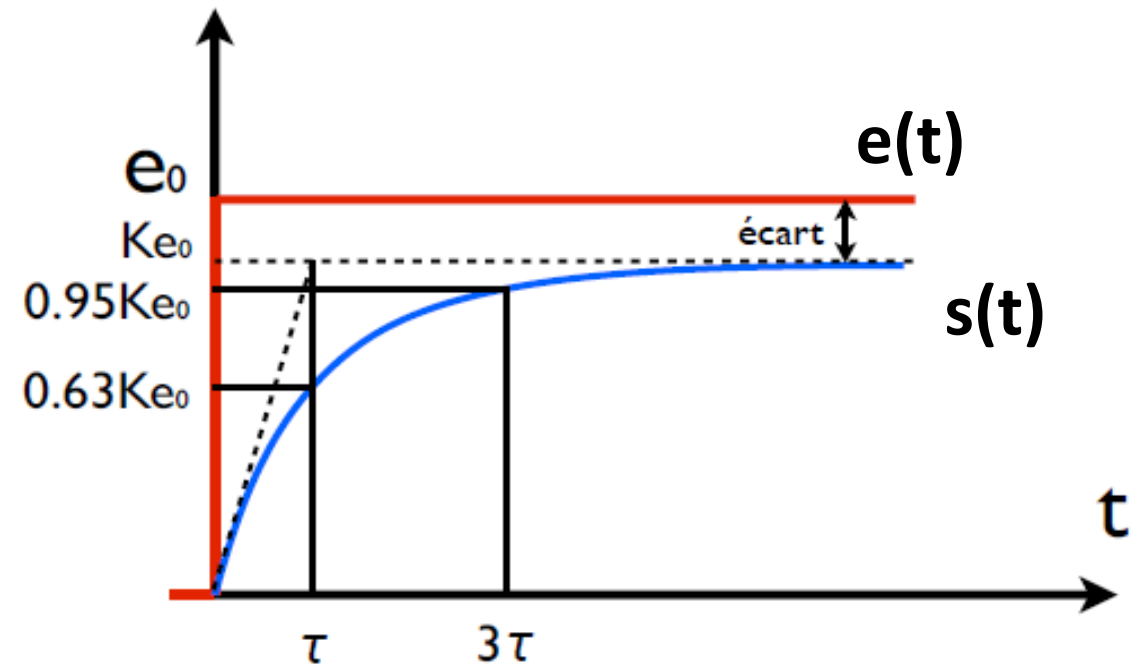
Plus τ est faible, plus le système est rapide.

Plus K est proche de 1, plus le système est précis.

Systèmes du premier ordre

Réponse indicielle

Identification temporelle



Détermination de K :

- Valeur asymptotique de la courbe qui vaut Ke_0 permet de déterminer K

Détermination de τ (3 méthodes) :

- τ correspond au temps pour lequel la sortie vaut 63% de sa valeur asymptotique,
- La sortie atteint 95% de sa valeur asymptotique pour $t = 3\tau$,
- La tangente à l'origine coupe l'asymptote à l'instant $t = \tau$.

Systèmes du premier ordre

Réponse à une rampe

$$e(t) = a \cdot t \cdot u(t) \longrightarrow E(p) = \frac{a}{p^2}$$

$$\text{Laplace} \longrightarrow S(p) = H(p) \cdot E(p) = \frac{K}{1+\tau p} \cdot \frac{a}{p^2}$$

$$\text{Réponse temporelle} \longrightarrow s(t) = aK \left(t - \tau + \tau e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \cdot u(t)$$

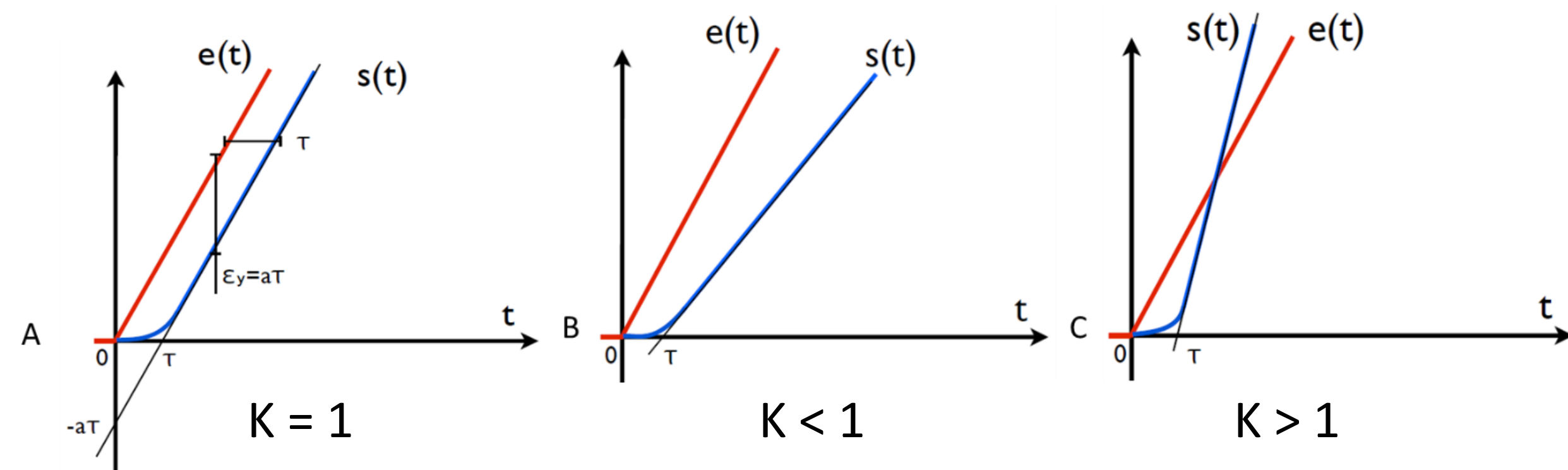
Systèmes du premier ordre

Réponse à une rampe

- Si $K = 1$: écart constant en régime permanent $\rightarrow \varepsilon_v = a\tau$. (La sortie suit l'entrée avec un retard τ).
- Si $K \neq 1$: La réponse tend vers la droite d'équation $y = K \cdot a \cdot (t - \tau)$
- $K < 1 \rightarrow \varepsilon_v$ augmente en permanence
- $K > 1 \rightarrow \varepsilon_v$ s'annule pour une valeur particulière de t , puis croît indéfiniment

Systèmes du premier ordre

Réponse à une rampe



Systèmes du deuxième ordre

Rappels

Système du 2nd ordre $\longrightarrow$
$$\frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + \frac{2z}{\omega_0} \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = Ke(t)$$

Avec :

- $\omega_0 \rightarrow$ pulsation propre non amortie du système
- $z \rightarrow$ coefficient d'amortissement du système (ou ξ)
- $K \rightarrow$ gain du système.

Laplace
+ Conditions d'Heaviside $\longrightarrow$
$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K\omega_0^2}{p^2 + 2z\omega_0 p + \omega_0^2} = \frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

Systèmes du deuxième ordre

Rappels

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K\omega_0^2}{p^2 + 2z\omega_0 p + \omega_0^2} = \frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

Discriminant :

$$\Delta = 4\omega_0^2(z^2 - 1).$$

3 cas possibles :

- $z > 1$: deux pôles réels : **régime apériodique**,
- $z = 1$: un pôle double : **régime apériodique critique**,
- $z < 1$: deux pôles complexes conjugués : **régime pseudo-périodique** (ou oscillant ou sous amorti).

Systèmes du deuxième ordre

Régime apériodique : $z > 1$

$$p_{1,2} = \omega_0 \left(-z \pm \sqrt{z^2 - 1} \right) < 0, \quad \text{avec } H(p) = \frac{K \omega_0^2}{(p - p_1)(p - p_2)}$$

Systèmes du deuxième ordre

Régime apériodique : $z > 1$

Réponse impulsionnelle

$$e(t) = \delta(t) \quad \longrightarrow \quad E(p) = 1$$

$$\text{Laplace} \quad \longrightarrow \quad S(p) = \frac{K\omega_0^2}{(p-p_1)(p-p_2)} \quad \xrightarrow{\text{D.E.S.}} \quad S(p) = \frac{K\omega_0}{2\sqrt{z^2-1}} \left(\frac{1}{p-p_1} - \frac{1}{p-p_2} \right)$$

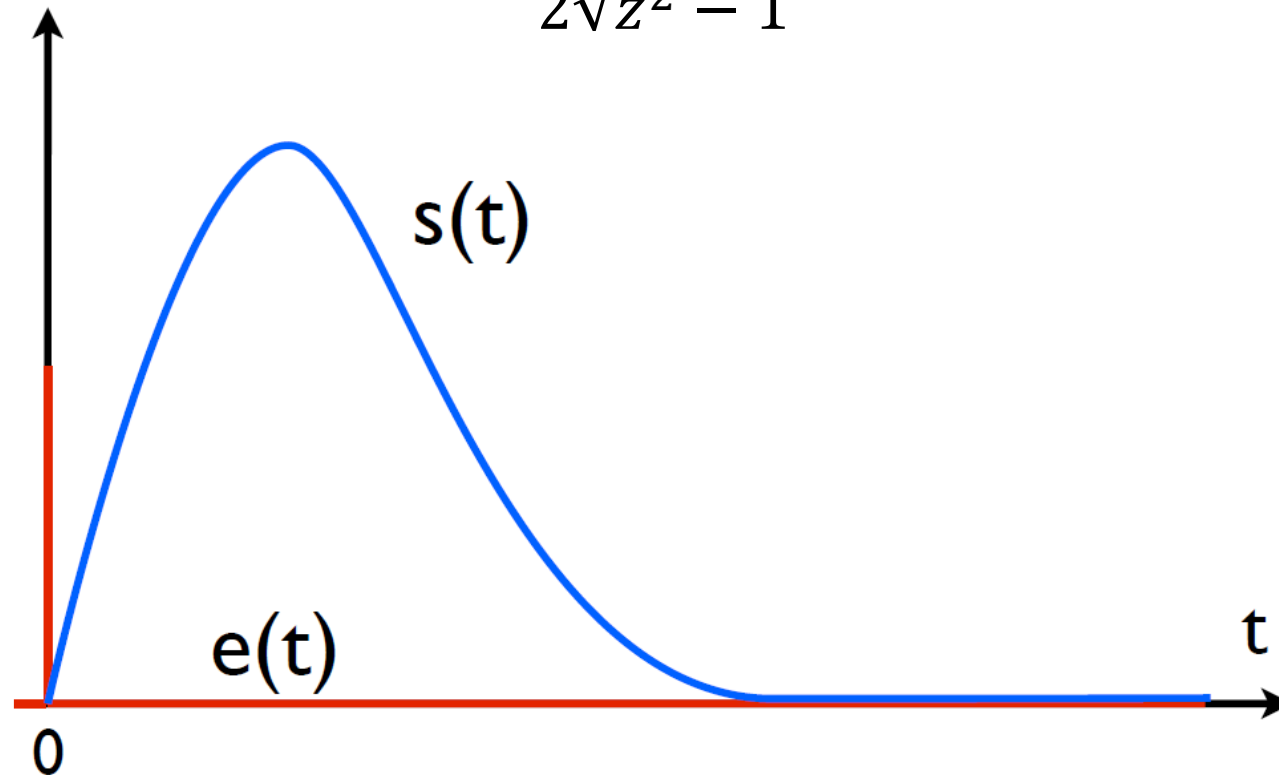
$$\text{Réponse temporelle} \quad \longrightarrow \quad s(t) = \frac{K\omega_0}{2\sqrt{z^2-1}} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}) \cdot u(t)$$

Systèmes du deuxième ordre

Régime apériodique : $z > 1$

Réponse impulsionnelle

$$s(t) = \frac{K\omega_0}{2\sqrt{z^2 - 1}} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}) \cdot u(t)$$



Systèmes du deuxième ordre

Régime apériodique : $z > 1$

Réponse indicielle

$$e(t) = e_0 u(t) \longrightarrow E(p) = \frac{e_0}{p}$$

$$\text{Laplace} \longrightarrow S(p) = \frac{K e_0 \omega_0^2}{p(p - p_1)(p - p_2)} \xrightarrow{\text{D.E.S.}} S(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{p - p_1} + \frac{C}{p - p_2}$$

$$\text{Avec } A = K e_0 ; B = \frac{K e_0 \omega_0^2}{p_1(p_1 - p_2)} \text{ et } C = -\frac{K e_0 \omega_0^2}{p_2(p_1 - p_2)}$$

$$\text{Réponse temporelle} \longrightarrow s(t) = K e_0 \left[1 - \frac{\omega_0}{2\sqrt{z^2 - 1}} \left(\frac{e^{p_1 t}}{p_1} - \frac{e^{p_2 t}}{p_2} \right) \right] \cdot u(t)$$

Systèmes du deuxième ordre

Régime apériodique : $z > 1$

Réponse indicielle

$$s(t) = Ke_0 \left[1 - \frac{\omega_0}{2\sqrt{z^2 - 1}} \left(\frac{e^{p_1 t}}{p_1} - \frac{e^{p_2 t}}{p_2} \right) \right] \cdot u(t)$$

Signes particuliers du régime apériodique :

- temps de réponse à 5% → ~~formule simple~~
- Si un des pôles est très petit devant l'autre → assimiler le système à un premier ordre.

Si $p_1 \gg p_2$, alors le pôle p_2 (inverse de la constante de temps τ_2) est dit dominant.

→ premier ordre de constante de temps τ_2

$$s(t) \cong Ke_0 \left(1 - e^{-\frac{t-\tau_1}{\tau_2}} \right) \cdot u(t)$$

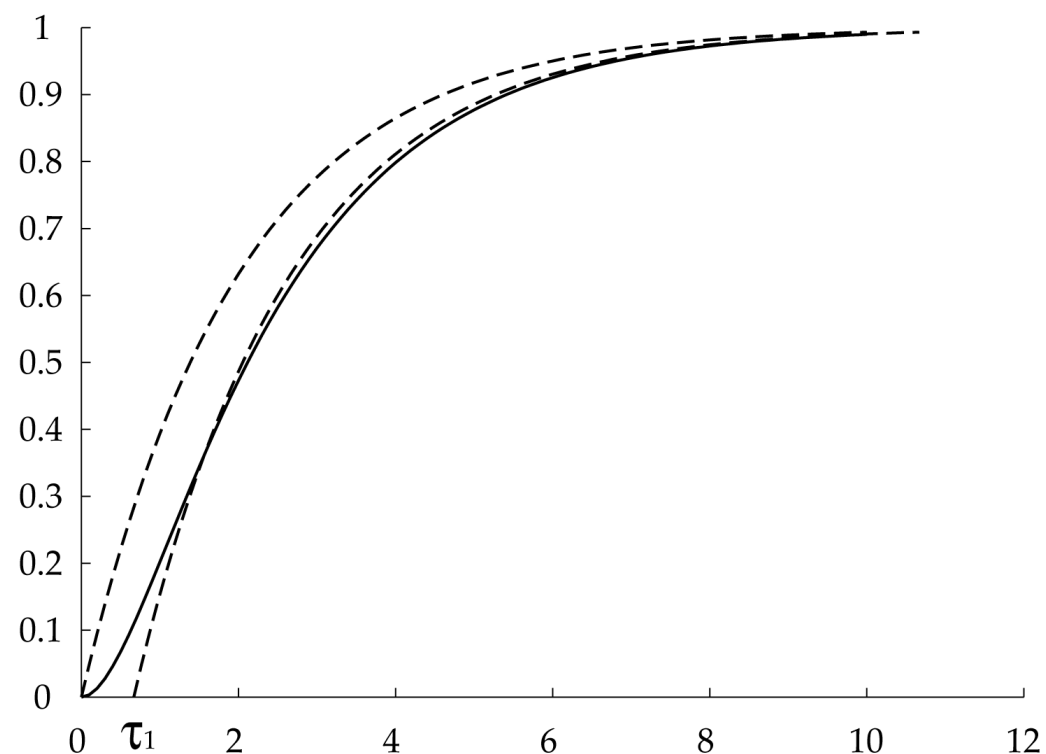
Systèmes du deuxième ordre

Régime apériodique : $z > 1$

Réponse indicielle

$$s(t) = Ke_0 \left[1 - \frac{\omega_0}{2\sqrt{z^2 - 1}} \left(\frac{e^{p_1 t}}{p_1} - \frac{e^{p_2 t}}{p_2} \right) \right] \cdot u(t)$$

$$s(t) \cong Ke_0 \left(1 - e^{-\frac{t-\tau_1}{\tau_2}} \right) \cdot u(t)$$



Systèmes du deuxième ordre

Régime apériodique critique : $z = 1$

Un pôle double : $p_{1,2} = -z\omega_0 = -\omega_0$

$$H(p) = \frac{K\omega_0^2}{p^2 + 2\omega_0 p + \omega_0^2} = \frac{K\omega_0^2}{(p + \omega_0)^2}$$

Systèmes du deuxième ordre

Régime apériodique critique : $z = 1$

Réponse impulsionnelle

$$e(t) = \delta(t) \longrightarrow E(p) = 1$$

$$\text{Laplace} \longrightarrow S(p) = \frac{K\omega_0^2}{(p + \omega_0)^2} \cdot E(p) = \frac{K\omega_0^2}{(p + \omega_0)^2}$$

$$\text{Réponse temporelle} \longrightarrow s(t) = K\omega_0^2 t e^{-\omega_0 t} \cdot u(t)$$

Systèmes du deuxième ordre

Régime apériodique critique : $z = 1$

Réponse indicielle

$$e(t) = e_0 u(t) \longrightarrow E(p) = \frac{e_0}{p}$$

$$\text{Laplace} \longrightarrow S(p) = \frac{K \omega_0^2}{(p + \omega_0)^2} \cdot E(p) = \frac{K e_0 \omega_0^2}{p(p + \omega_0)^2}$$

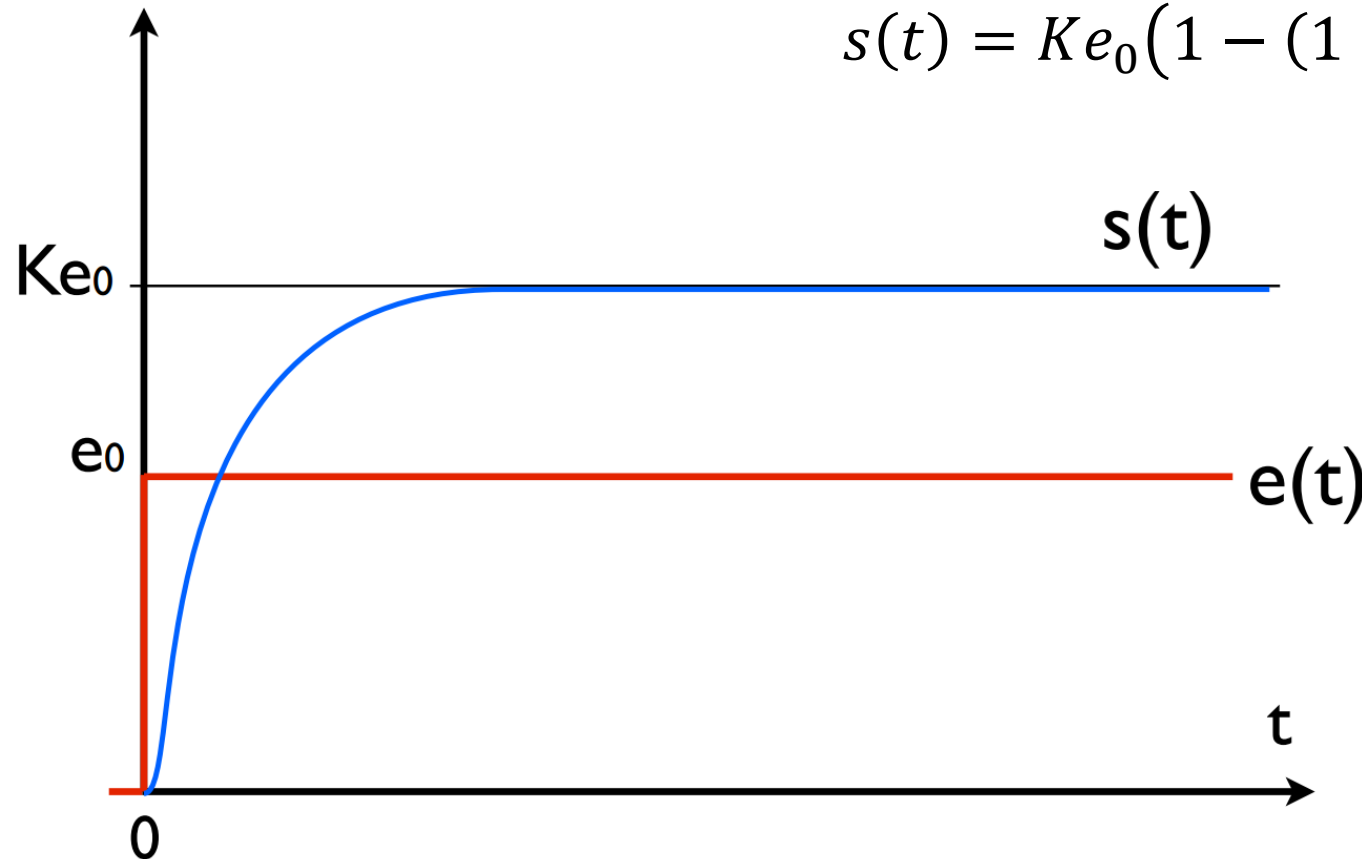
$$\text{Réponse temporelle} \longrightarrow s(t) = K e_0 (1 - (1 + \omega_0 t) e^{-\omega_0 t}) \cdot u(t)$$

Systèmes du deuxième ordre

Régime apériodique critique : $z = 1$

Réponse indicielle

$$s(t) = Ke_0(1 - (1 + \omega_0 t)e^{-\omega_0 t}).u(t)$$



- Temps de réponse à 5% → ~~formule simple~~
- ~~Dépassement~~

Remarques :

- La courbe possède la même allure générale que pour le cas $z > 1$, comme si l'on avait deux constantes de temps identiques.
- Ce cas n'existe pas physiquement, car on ne peut réaliser parfaitement $z = 1$.

Systèmes du deuxième ordre

Régime pseudo-périodique : $z < 1$

Deux pôles complexes conjugués : $p_{1,2} = \omega_0(-z \pm i\sqrt{1-z^2})$

$$H(p) = \frac{K\omega_0^2}{(p + z\omega_0)^2 + (\omega_0\sqrt{1-z^2})^2}$$

Systèmes du deuxième ordre

Régime pseudo-périodique : $z < 1$

Réponse impulsionnelle

$$e(t) = \delta(t) \quad \longrightarrow \quad E(p) = 1$$

$$\text{Laplace} \quad \longrightarrow \quad S(p) = H(p) \cdot E(p) = \frac{K\omega_0^2}{(p + z\omega_0)^2 + (\omega_0\sqrt{1 - z^2})^2}$$

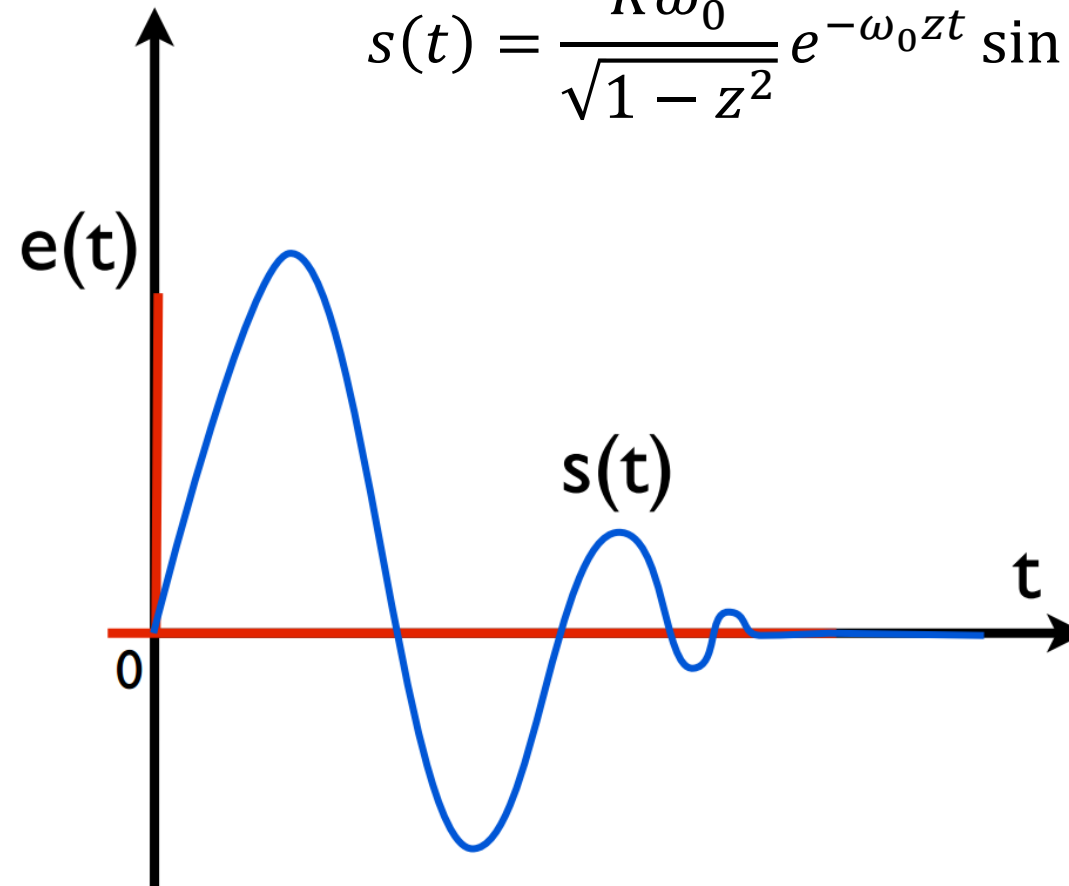
$$\text{Réponse temporelle} \quad \longrightarrow \quad s(t) = \frac{K\omega_0}{\sqrt{1 - z^2}} e^{-\omega_0 z t} \sin\left(\omega_0\sqrt{1 - z^2}t\right) \cdot u(t)$$

Systèmes du deuxième ordre

Régime pseudo-périodique : $z < 1$

Réponse impulsionnelle

$$s(t) = \frac{K\omega_0}{\sqrt{1-z^2}} e^{-\omega_0 z t} \sin\left(\omega_0 \sqrt{1-z^2} t\right) \cdot u(t)$$



Systèmes du deuxième ordre

Régime pseudo-périodique : $z < 1$

Réponse indicielle

$$e(t) = e_0 u(t) \longrightarrow E(p) = \frac{e_0}{p}$$

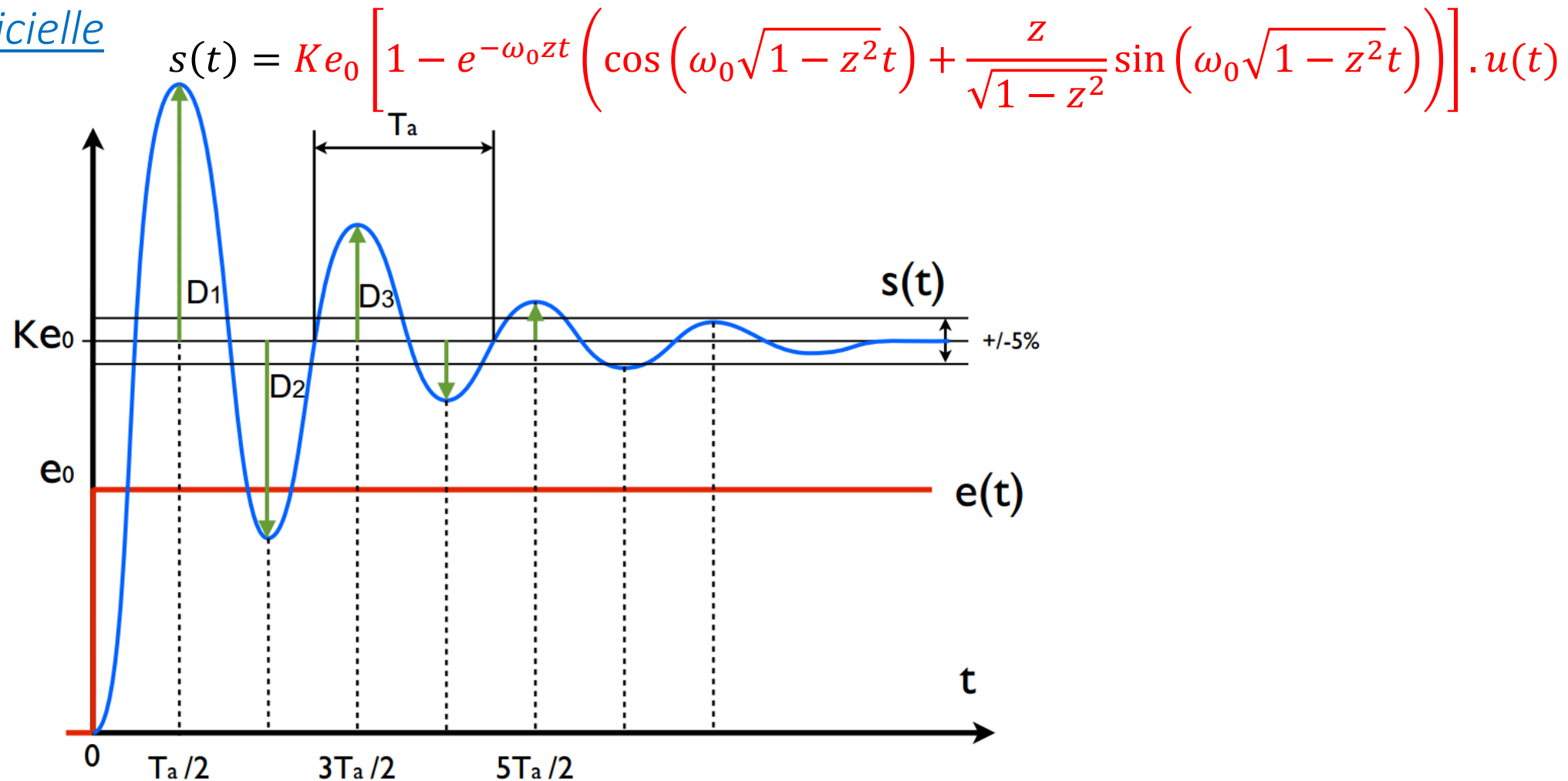
$$\text{Laplace} \longrightarrow S(p) = \frac{K e_0 \omega_0^2}{(p^2 + 2z\omega_0 p + \omega_0^2)p}$$

$$\text{Réponse temporelle} \longrightarrow s(t) = K e_0 \left[1 - e^{-\omega_0 z t} \left(\cos(\omega_0 \sqrt{1 - z^2} t) + \frac{z}{\sqrt{1 - z^2}} \sin(\omega_0 \sqrt{1 - z^2} t) \right) \right] \cdot u(t)$$

Systèmes du deuxième ordre

Régime pseudo-périodique : $z < 1$

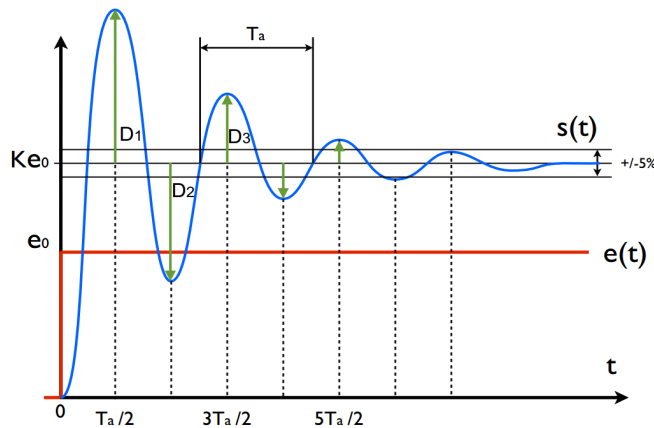
Réponse indicielle



Systèmes du deuxième ordre

Régime pseudo-périodique : $z < 1$

Réponse indicielle



- La réponse des **oscillations amorties** dont la période, appelée pseudo période est :

$$T_a = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1-z^2}} = \frac{2\pi}{\omega_a} \text{ avec } \omega_a = \omega_0 \sqrt{1-z^2} \text{ la pulsation amortie}$$

- La pente à l'origine est nulle : $(\lim_{t \rightarrow 0^+} s'(t) = 0 \text{ donc pente nulle})$

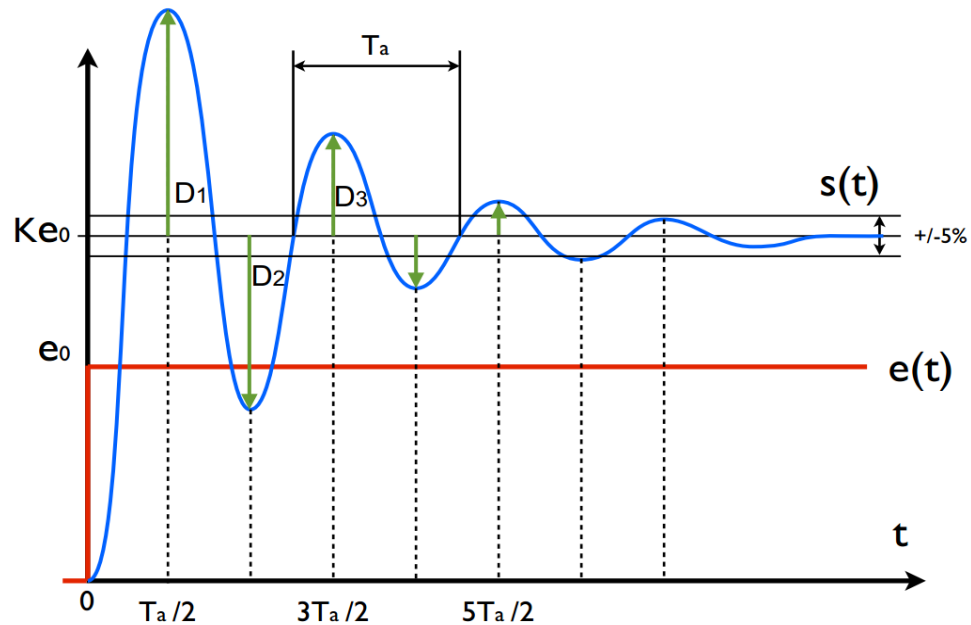
- Les dépassements relatifs pour les instants t_k tels que $s'(t_k) = 0$ ont pour valeur :

$$D_{k\%} = 100 \frac{|s(t_k) - s(+\infty)|}{|s(+\infty)|} = 100 \cdot e^{\frac{-zk\pi}{\sqrt{1-z^2}}} \text{ avec } t_k = \frac{k\pi}{\omega_0 \sqrt{1-z^2}}$$

Systèmes du deuxième ordre

Régime pseudo-périodique : $z < 1$

Réponse indicielle

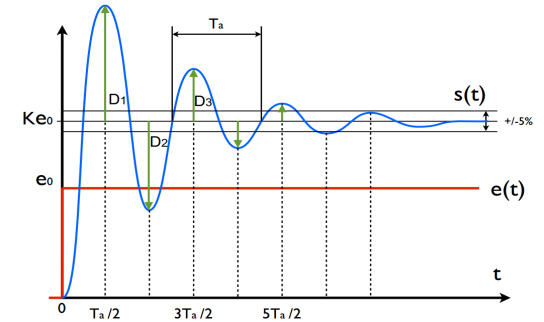


$$D_1 = e^{\frac{-z\pi}{\sqrt{1-z^2}}} \text{ soit } z = \sqrt{\frac{(\ln(D_1))^2}{\pi^2 + (\ln(D_1))^2}}$$

Systèmes du deuxième ordre

Régime pseudo-périodique : $z < 1$

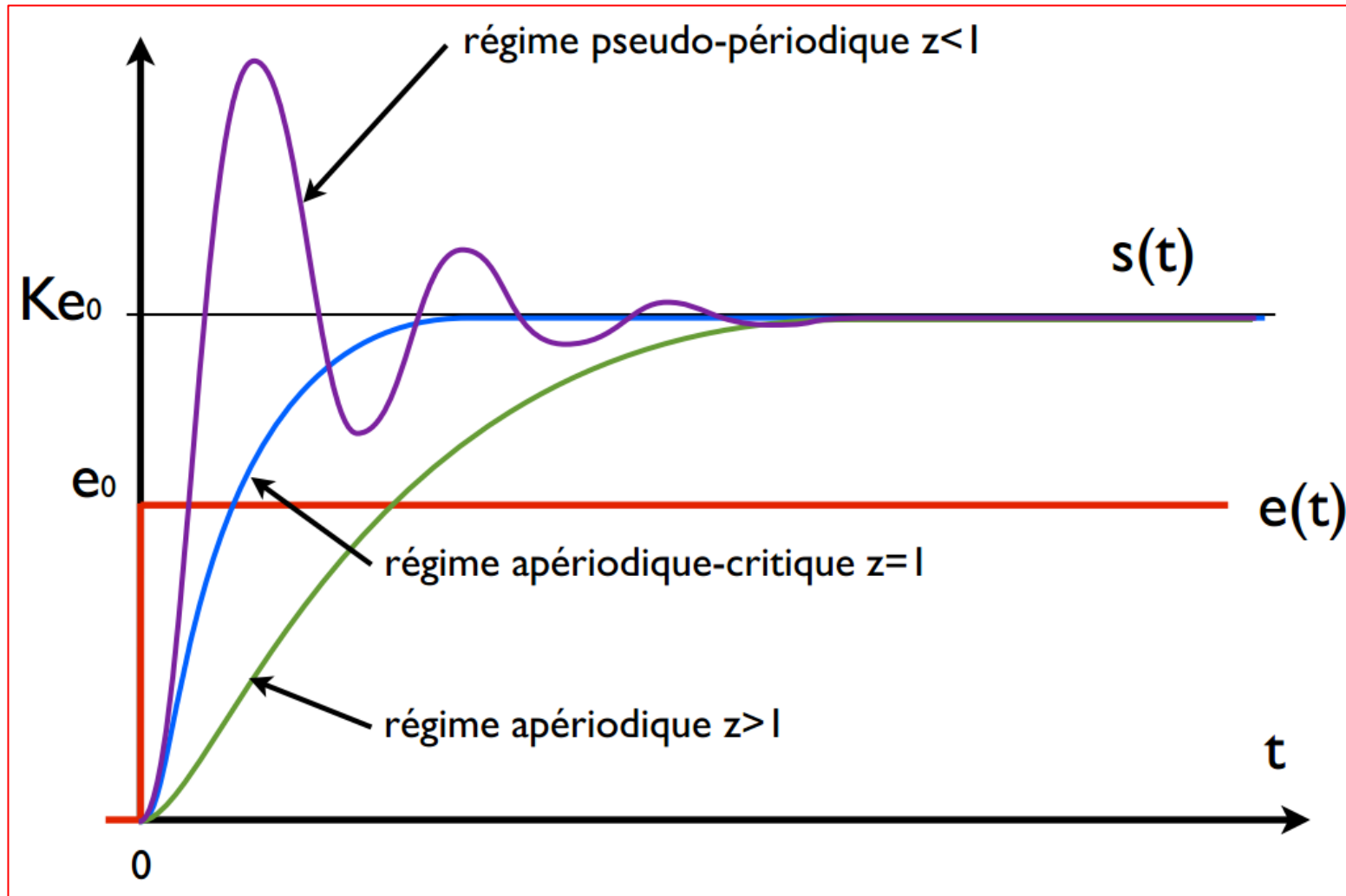
Réponse indicielle



Temps du 1 ^{er} dépassement	$t_1 = \frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - z^2}}$
Amplitude du 1 ^{er} dépassement	$D_{1\%} = 100 \cdot e^{\frac{-z\pi}{\sqrt{1-z^2}}}$
Pulsation amortie	$\omega_a = \omega_0 \sqrt{1 - z^2}$
Pseudo-période	$T_a = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - z^2}} = \frac{2\pi}{\omega_a}$
Coefficient d'amortissement	$z = \sqrt{\frac{(\ln(D_1))^2}{\pi^2 + (\ln(D_1))^2}}$

Systèmes du deuxième ordre

Bilan sur les réponses indicielles



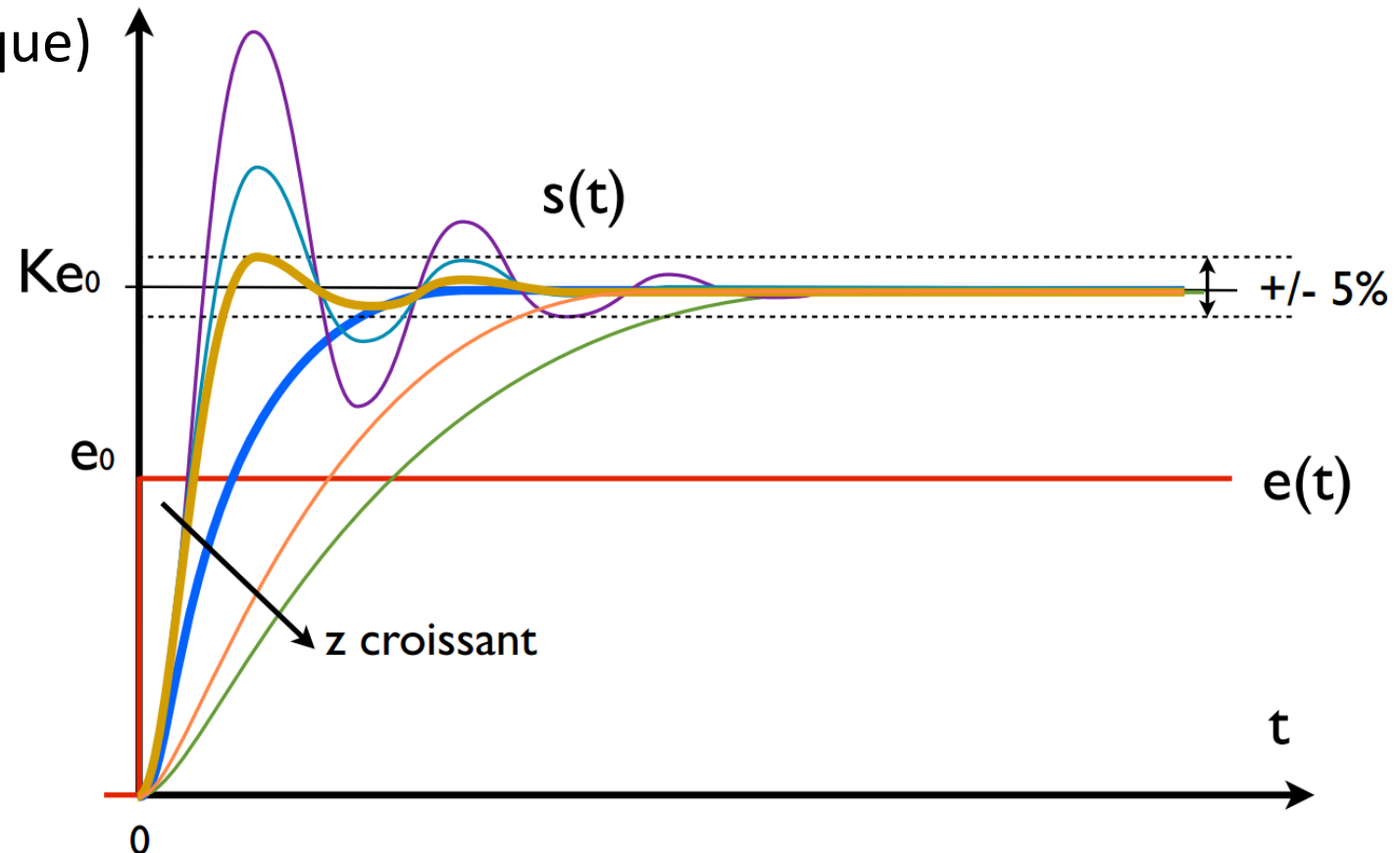
Systèmes du deuxième ordre

Influence des paramètres caractéristiques

Coefficient d'amortissement z (ou ξ)

Pour $z < 1$ (régime pseudo-périodique)

- $z = 1$: réponse aperiodique critique
- $z \approx 0,7$: réponse optimisant le temps de réponse à 5% ($D_{1\%} = 5\% \cdot K e_0$).

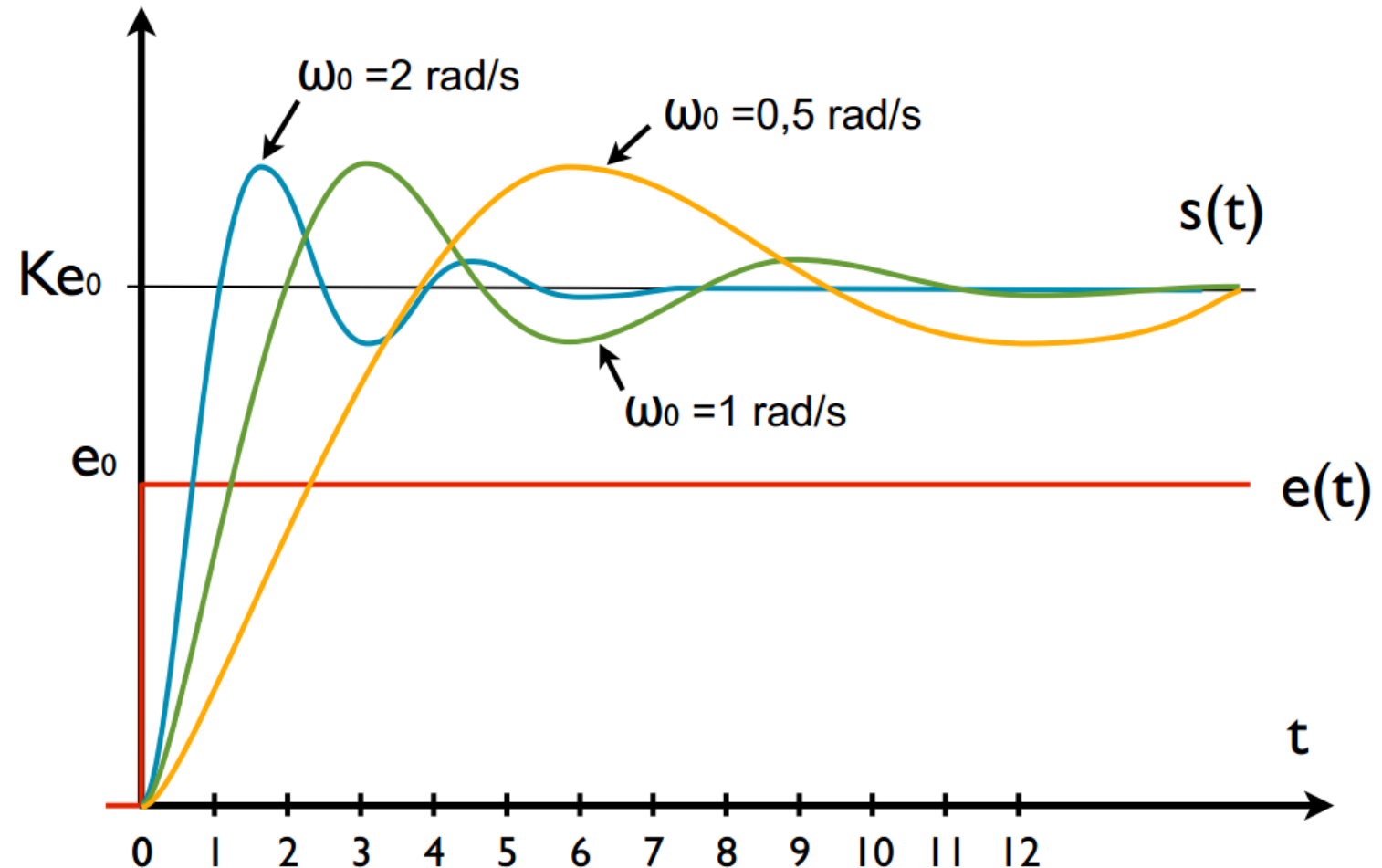


Systèmes du deuxième ordre

Influence des paramètres caractéristiques

Pulsation propre ω_0

$\omega_0 \rightarrow$ modifie $\rightarrow$ amplitude
des dépassements

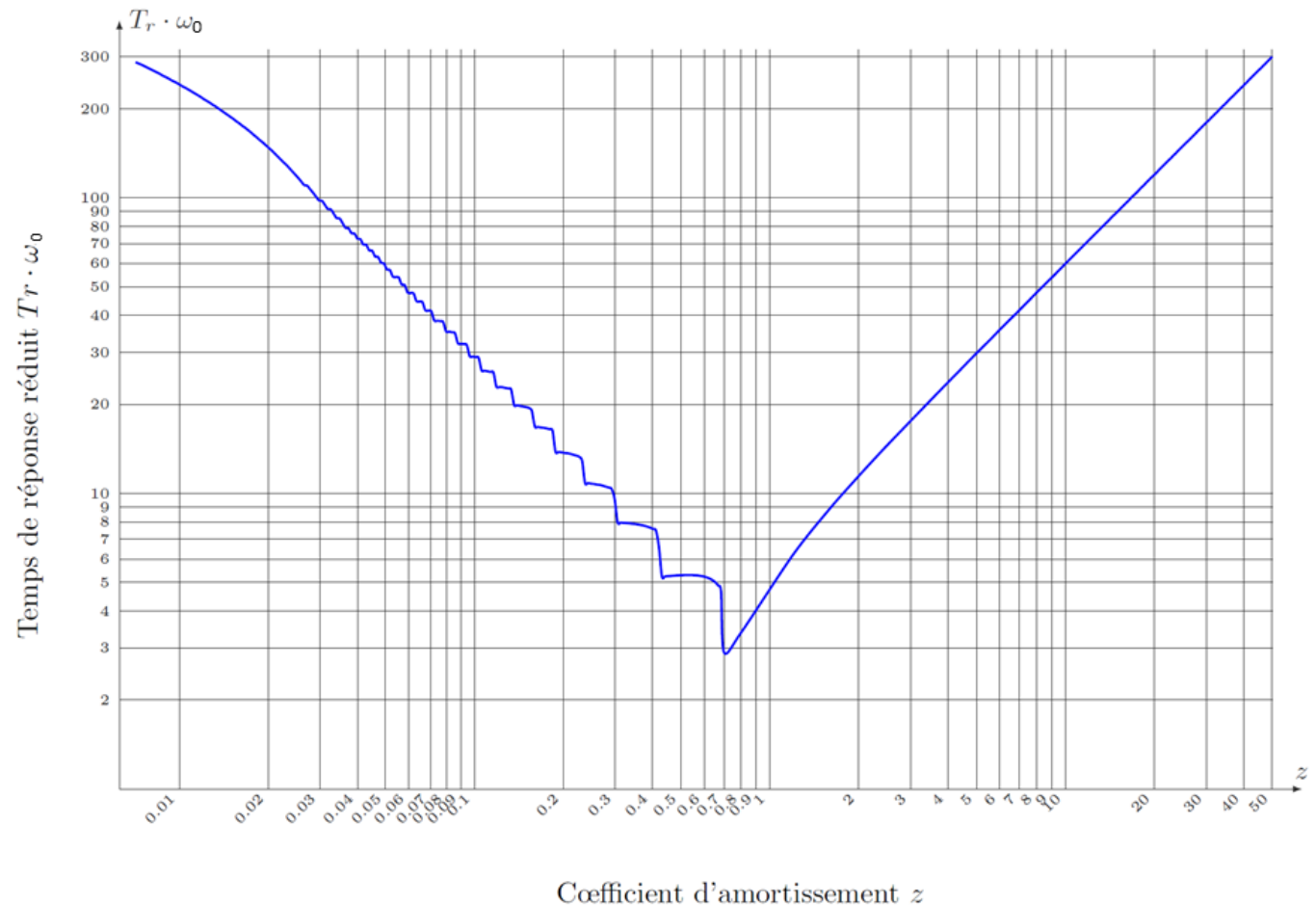


Systèmes du deuxième ordre

Influence des paramètres caractéristiques

Détermination du temps de réponse à 5%

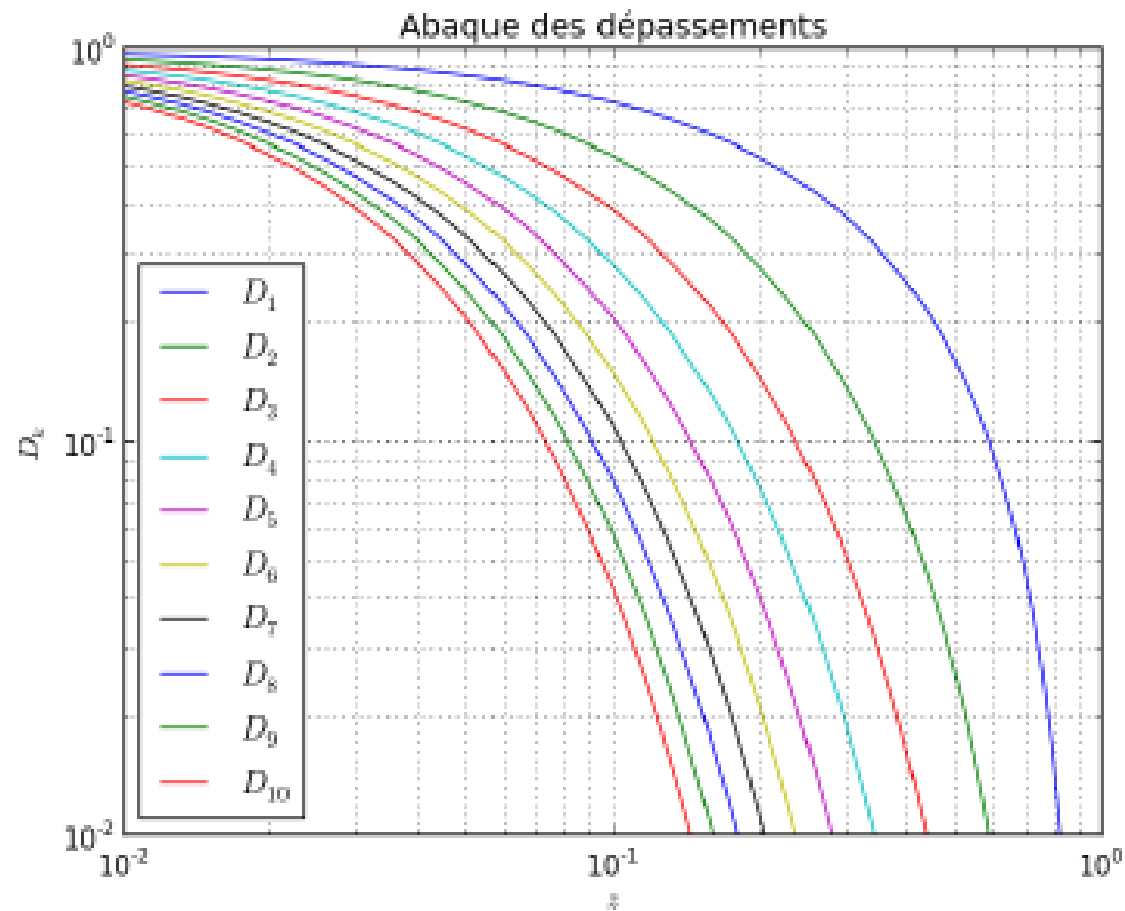
- Temps de réponse réduit ($t_{5\%} \cdot \omega_0$)



Systèmes du deuxième ordre

Influence des paramètres caractéristiques

Abaque des dépassements en fonction de z



$$D_{k\%} = 100 \frac{|s(t_k) - s(+\infty)|}{|s(+\infty)|} = 100 \cdot e^{\frac{-zk\pi}{\sqrt{1-z^2}}}$$

Avec
$$t_k = \frac{k\pi}{\omega_0 \sqrt{1-z^2}}$$

Dépassements relatifs $\rightarrow$ dépendent $\rightarrow$ que de z

Systèmes du deuxième ordre

Tracé des courbes et abaquages sur Python (module *matplotlib*)

```
def Discretisation(a,b,n):
    return [a+k*(b-a)/n for k in range(n)]
```

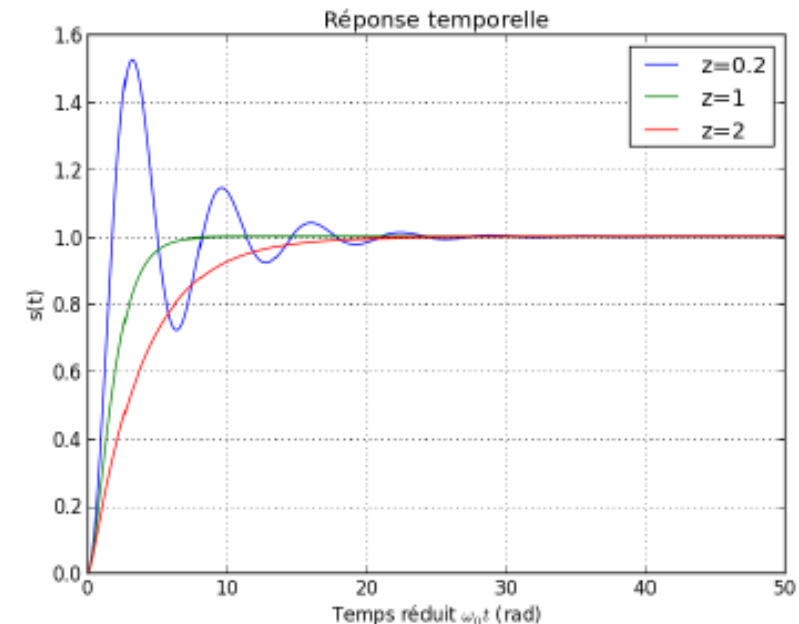
```
Liste_wot = Discretisation(0,50,1000)
```

```
def Solution(w0t,z):
    if z>1:
        a=ma.sqrt(z**2-1)
        return 1-(1+z/a)*ma.exp(-w0t*(z-a))/2-(1-z/a)*ma.exp(-w0t*(z+a))/2
    elif z==1:
        return 1-(1+w0t*z)*ma.exp(-w0t*z)
    else:
        a = ma.sqrt(1-z**2)
        phi = ma.atan(a/z)
        return 1-ma.exp(-w0t*z)*ma.sin(w0t*a+phi)/ma.sin(phi)
```

```
def ReponseTemporelle(L,z):
    return [Solution(wot,z) for wot in L]
```

```
plt.figure() # Définition d'une nouvelle figure
for z in [0.2,1,2]:
    plt.plot(Liste_wot, ReponseTemporelle(Liste_wot,z),label='z='+str(z))
# Graphes
plt.xlabel("Temps réduit $\omega_0 t$ (rad)") # Légende de l'axe des abscisses
plt.ylabel("s(t)") # Légende de l'axe des ordonnées
plt.grid() # Affiche une grille
plt.legend(loc=1) # Affiche la légende
plt.title('Réponse temporelle') #Titre
plt.show() # Affichage de la figure
```

$$s(t) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{z}{\sqrt{z^2-1}} \right) e^{-\omega_0 t(z-\sqrt{z^2-1})} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2-1}} \right) e^{-\omega_0 t(z+\sqrt{z^2-1})} & \text{si } z > 1 \\ 1 - (1 + \omega_0 t z) e^{-\omega_0 t z} & \text{si } z = 1 \\ 1 - \frac{e^{-\omega_0 t z}}{\sqrt{1-z^2}} \sin(\omega_0 t \sqrt{1-z^2} + \varphi) \text{ avec } \sin \varphi = \sqrt{1-z^2} \text{ et } \cos \varphi = z & \text{si } z < 1 \end{cases}$$



Systèmes du deuxième ordre

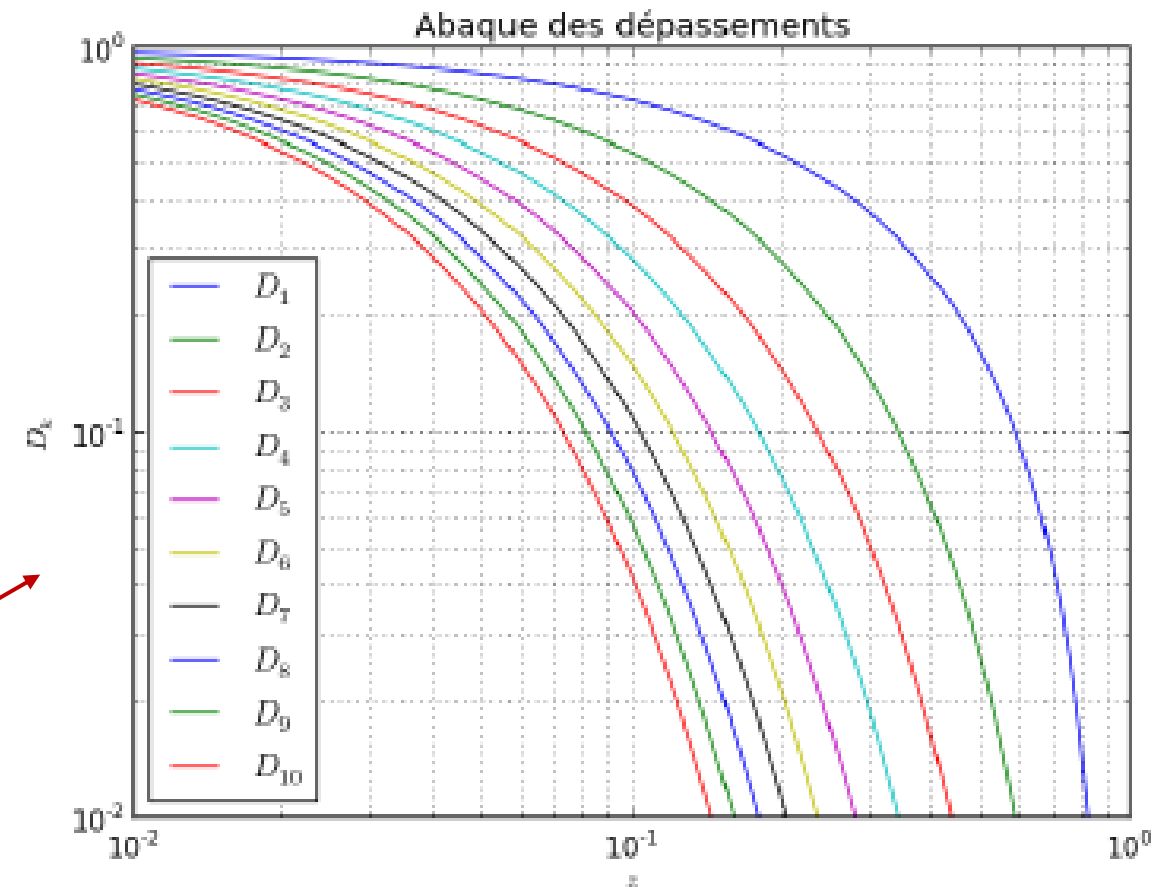
Bilan sur les réponses indicielles

```
def DiscretisationLog(a,b,n):
    return [10**x for x in Discretisation(a,b,n)]
```

```
Liste_z = DiscretisationLog(-2,1,500)
Liste_wot = Discretisation(0,150,1000)
```

```
def Depassement(k,L):
    return [ma.exp(-k*ma.pi*z/(ma.sqrt(1-z**2))) for z in L]
```

```
plt.figure()
plt.xscale('log') # Echelle logarithmique abscisses
plt.yscale('log') # Echelle logarithmique ordonnées
plt.xlim(.01,1)
plt.ylim(0.01,1)
for k in range(1,11):
    Liste_Dk = Depassement(k,Liste_z)
    plt.plot(Liste_z,Liste_Dk,label='$D_{'+str(k)+'}$')
plt.xlabel('$z$')
plt.ylabel('$D_k$')
plt.title("Abaque des dépassements")
plt.legend(loc=0)
plt.grid(which='both') # Affiche une grille
plt.show()
```



Systèmes du deuxième ordre

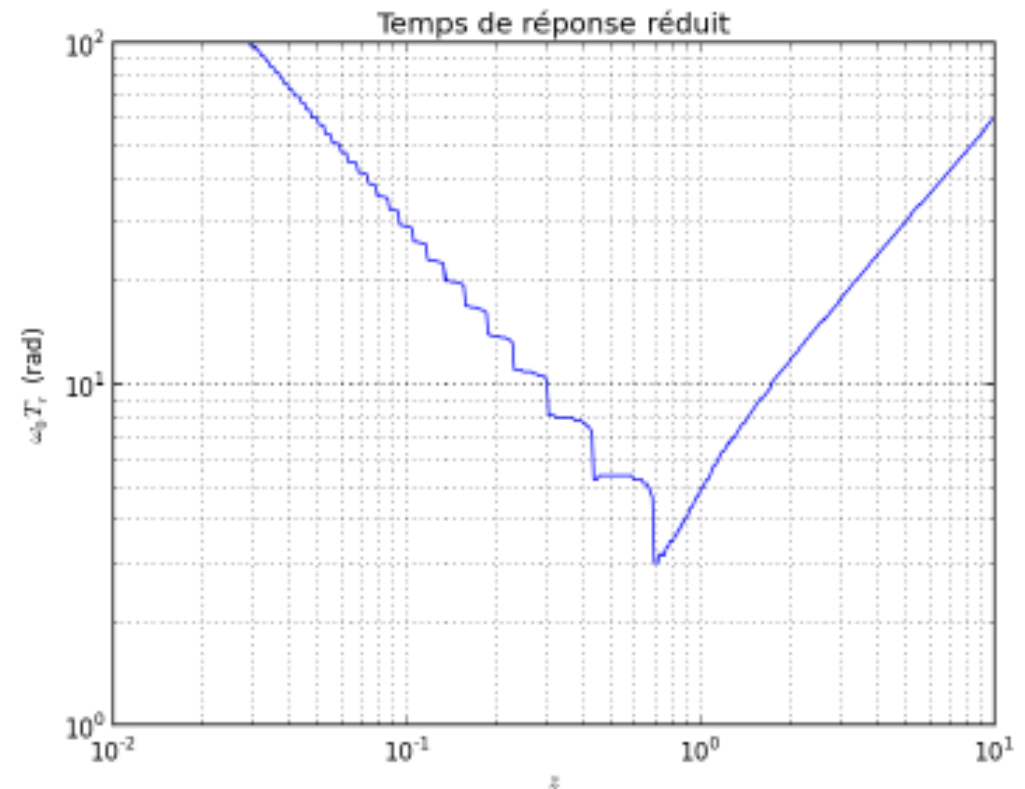
Bilan sur les réponses indicielles

```
def EstDansLaBande(x):
    return x<=1.05 and x>=0.95
```

```
def TempsDeReponse(L,z):
    n=len(L)
    k=n-1
    Test = True
    while k>=0 and Test:
        if EstDansLaBande(Solution(L[k],z)):
            k = k-1
        else:
            Test = False
    return L[min(k+1,n-1)]
```

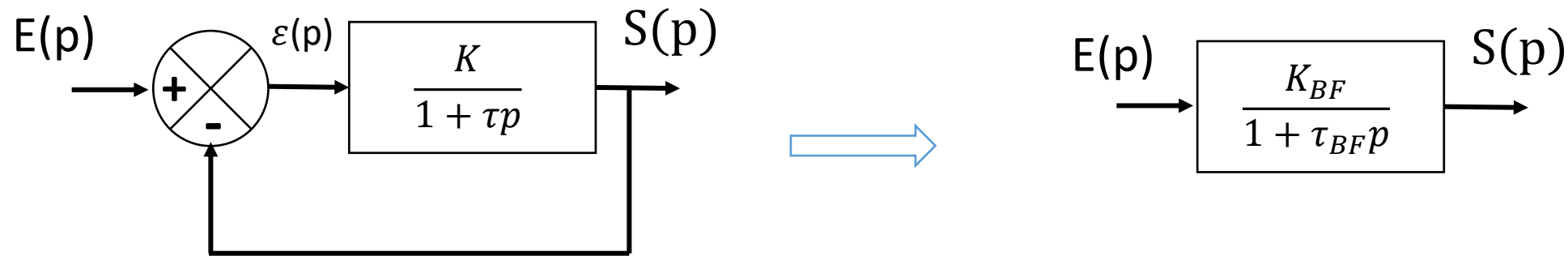
```
Liste_Treduit = [TempsDeReponse(Liste_wot,z) for z in Liste_z]
```

```
plt.figure()
plt.xscale('log')
plt.yscale('log')
plt.xlim(.01,10)
plt.ylim(1,100)
plt.xlabel('$z$')
plt.ylabel('$\omega_0 T_r$ (rad)')
plt.title("Temps de réponse réduit")
plt.grid(which='both')
plt.plot(Liste_z,Liste_Treduit)
plt.show()
```



Systèmes du 1er et 2nd ordre bouclés par un retour UNITAIRE

FTBF d'un système du 1^{er} ordre



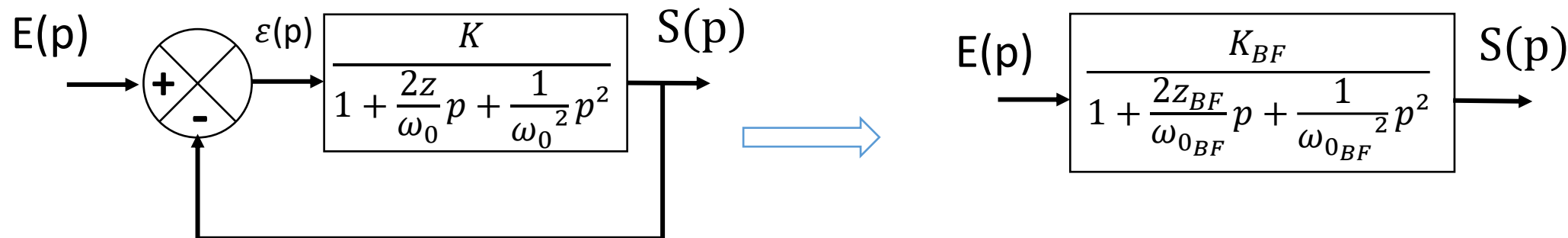
$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{\frac{K}{1 + \tau p}}{1 + \frac{K}{1 + \tau p}} = \frac{K}{1 + \tau p + K} = \frac{\frac{K}{1 + K}}{1 + \frac{\tau}{1 + K} p}$$

$$K_{BF} = \frac{K}{1 + K} < 1$$

$$\tau_{BF} = \frac{\tau}{1 + K} < \tau$$

Systèmes du 1er et 2nd ordre bouclés par un retour UNITAIRE

FTBF d'un système du 2nd ordre



$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{\frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}}{1 + \frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}} = \frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2} + K} = \frac{\frac{K}{1+K}}{1 + \frac{2z}{\omega_0(1+K)}p + \frac{p^2}{\omega_0^2(1+K)}}$$

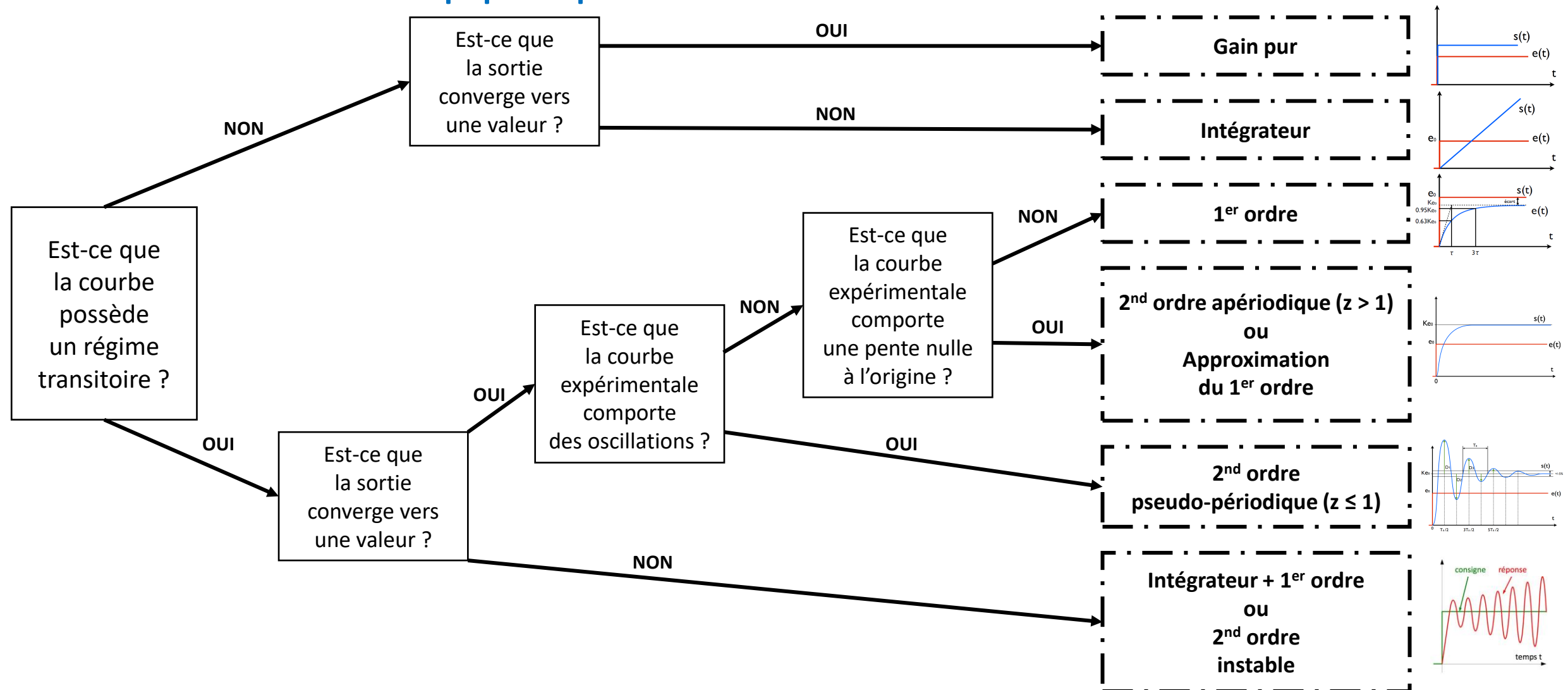
$$K_{BF} = \frac{K}{1+K} < 1 \quad z_{BF} = \frac{z}{\sqrt{1+K}} < z \quad \omega_{0_{BF}} = \omega_0 \sqrt{1+K} > \omega_0$$

Systemes du 1er et 2nd ordre bouclés par un retour UNITAIRE

Avantages et inconvénients de la boucle de retour UNITAIRE

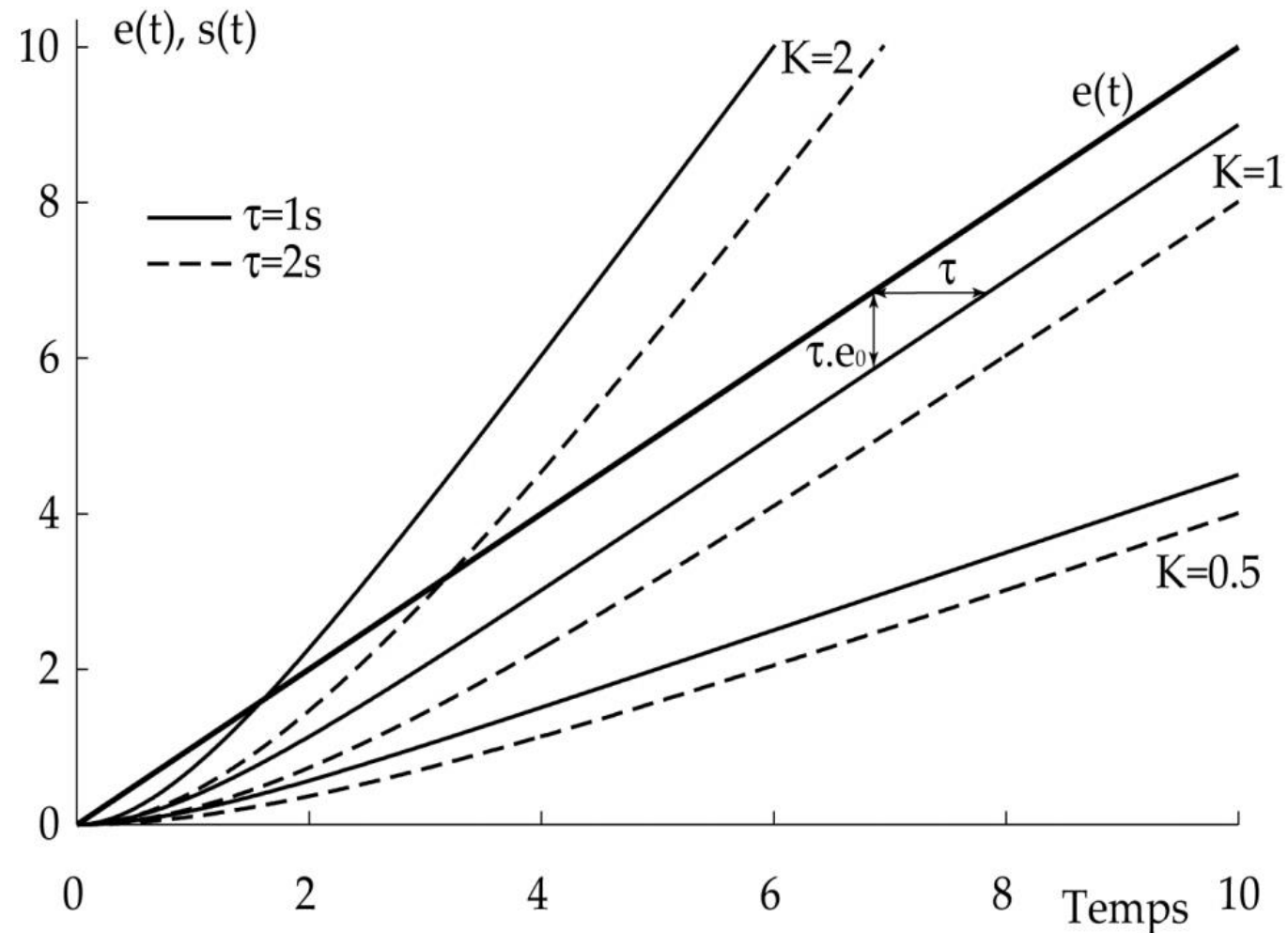
- Un 1^{er} ou 2nd ordre bouclé par un retour unitaire → un 1^{er} ou 2nd ordre mais avec de nouveaux paramètres
 - Un 1^{er} ou 2nd ordre bouclé par un retour unitaire → jamais une erreur nulle car $K_{BF} \neq 1$
 - Augmentation du gain de la chaîne directe (K) pour un système bouclé par retour unitaire :
 - Améliorera la précision car $K_{BF} \rightarrow 1$
 - Un 1^{er} ordre bouclé → plus rapide que ce 1^{er} ordre sans bouclage ($\tau_{BF} < \tau$)
 - Un 2nd ordre bouclé → moins amorti que ce 2nd ordre sans bouclage car ($z_{BF} < z$)
 - Un 2nd ordre bouclé → plus rapide que ce 2nd ordre sans bouclage car ($\omega_{0_{BF}} > \omega_0$)
 - Augmentation du gain dans la chaîne directe (K) → problèmes de dépassements et de stabilité (voir 2^{ème} année).
- Nécessité de réaliser des **compromis entre précision-rapidité-stabilité...**

Choix du modèle de comportement lorsque l'on applique un échelon en entrée



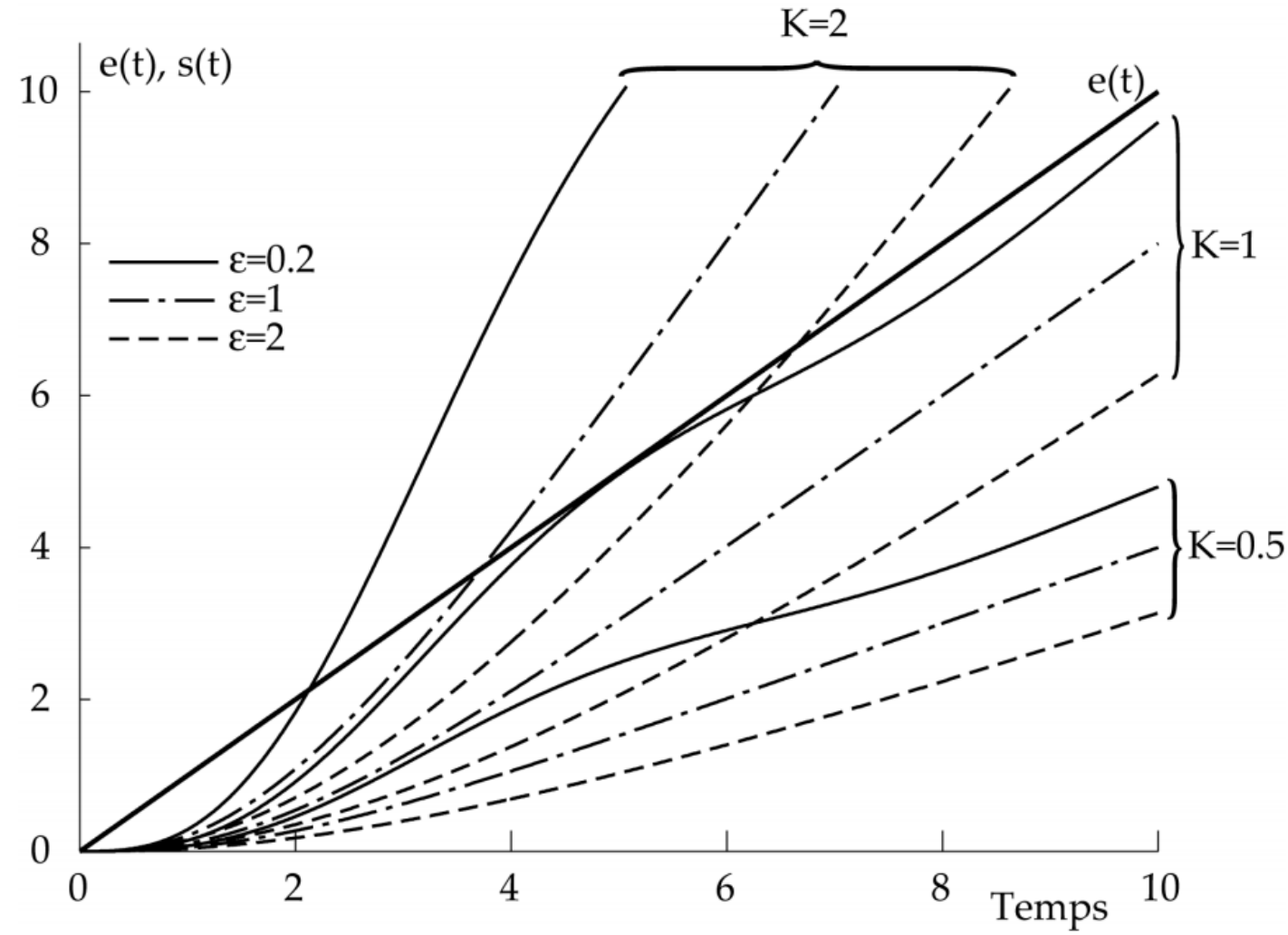
Réponses à d'autres signaux tests

Réponse d'un système du premier ordre à une entrée rampe



Réponses à d'autres signaux tests

Réponse d'un système du second ordre à une entrée rampe

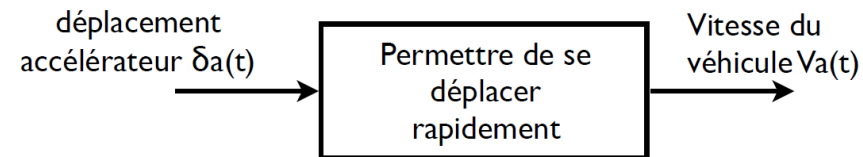


Résumé de la démarche d'analyse

Système réel



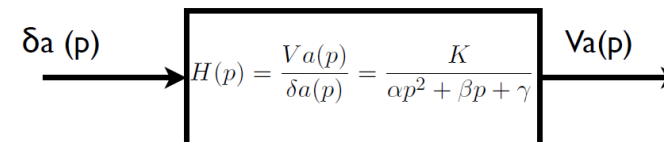
Fonction du système



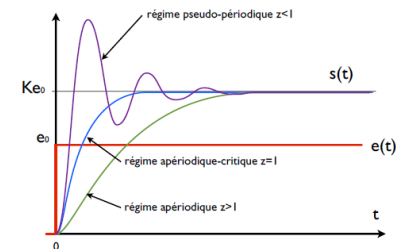
Equation différentielle

$$\alpha \frac{d^2 V a}{dt^2} + \beta \frac{d V a}{dt} + \gamma V a = K \cdot \delta a$$

*Représentation dans le domaine de Laplace :
Fonction de transfert*



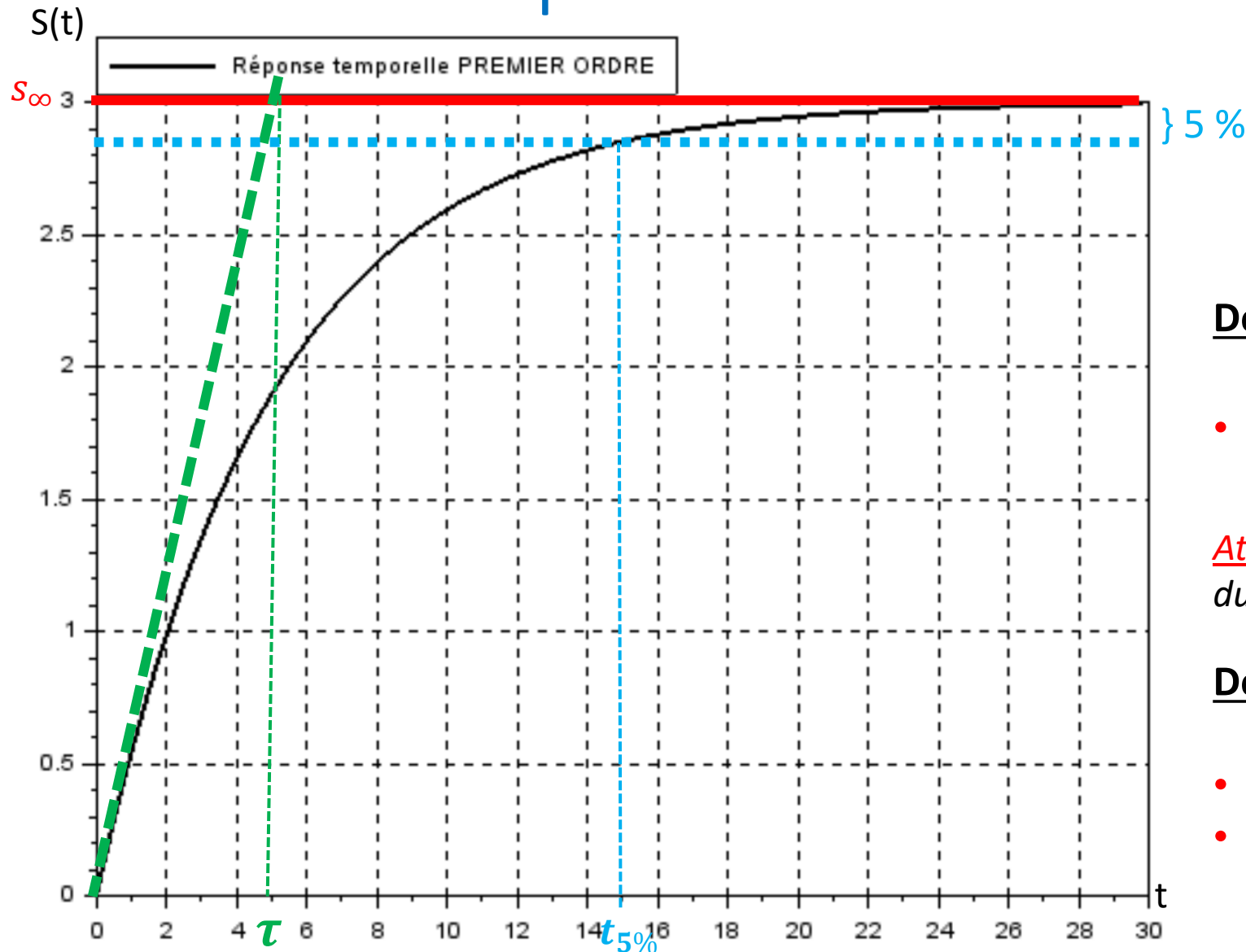
Etudes des réponses du système : évaluation des performances



Démarche d'analyse



Méthode de détermination graphique des paramètres d'une FT



$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \tau p}$$

Pente à l'origine non nulle

Détermination de K :

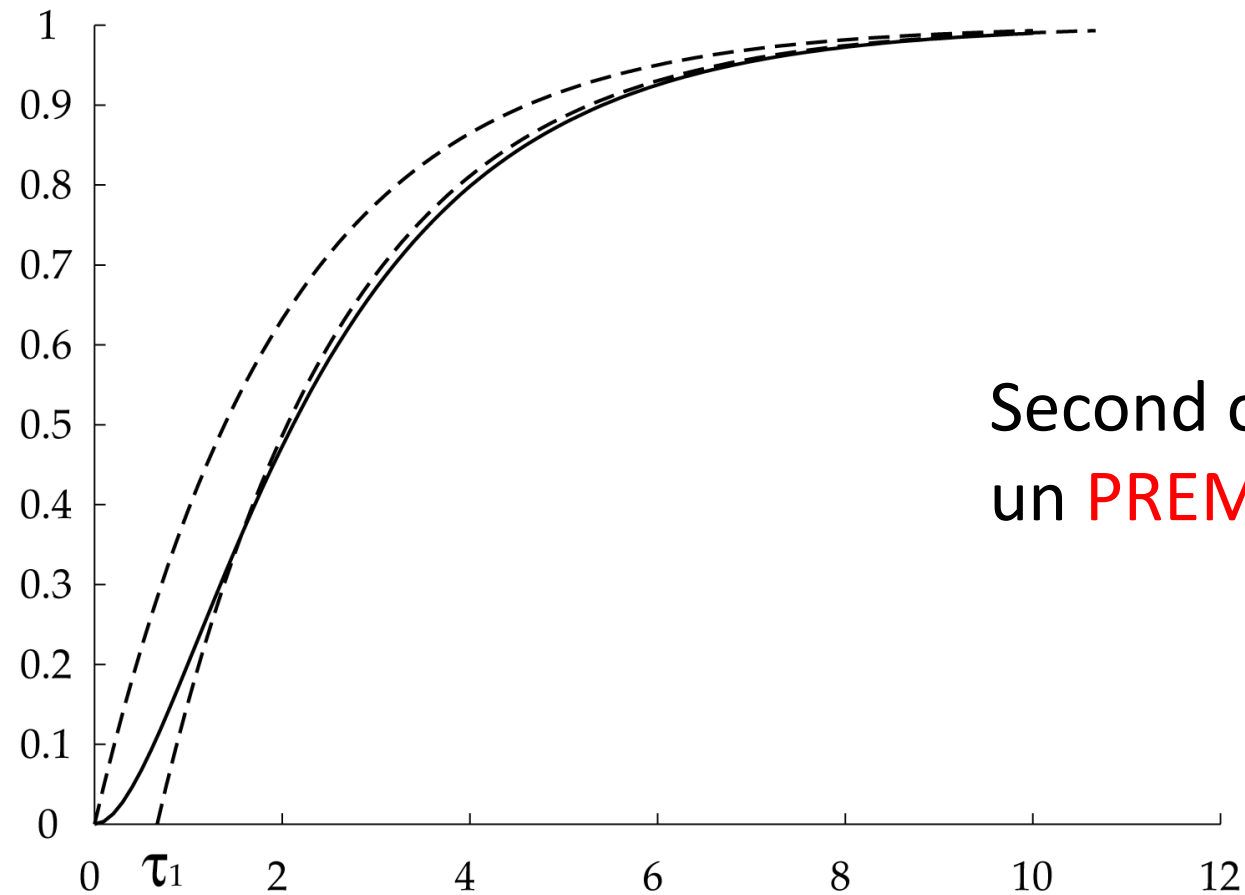
- $K = \frac{S_\infty}{e_0}$

Attention : Si l'on trace $s(t)/e(t)$ en fonction du temps, K est alors directement la valeur finale

Détermination de τ :

- $t_{5\%} = 3 \cdot \tau$
- La tangente à l'origine coupe l'asymptote à l'instant $t = \tau$

Méthode de détermination graphique des paramètres d'une FT



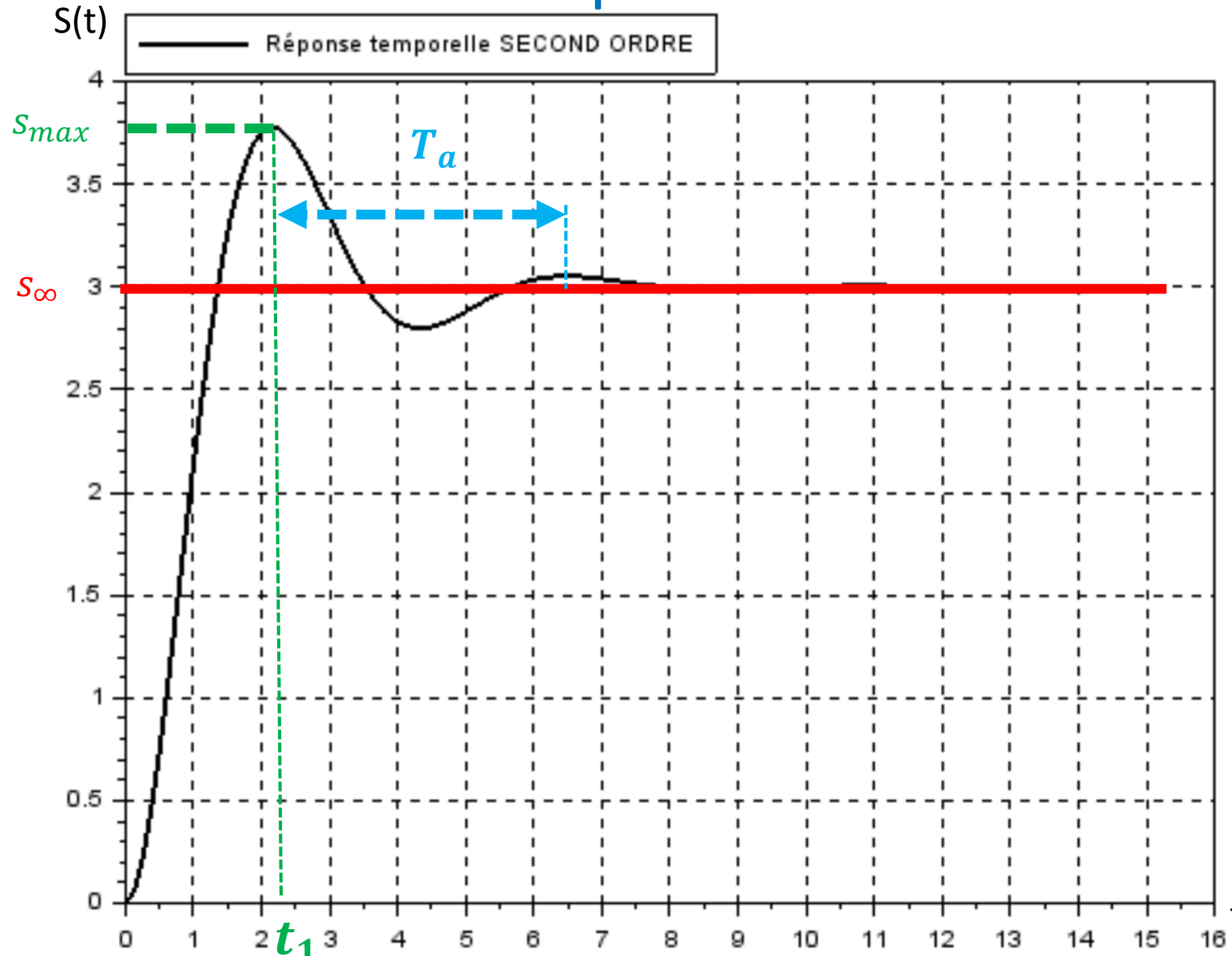
$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

Pente à l'origine nulle

Second ordre apériodique assimilable à
un **PREMIER ORDRE AVEC UN RETARD**

$$s(t) \cong K e_0 \left(1 - e^{-\frac{t-\tau_1}{\tau_2}} \right) . u(t)$$

Méthode de détermination graphique des paramètres d'une FT



$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

Pente à l'origine nulle

Détermination de K :

- $K = \frac{S_{\infty}}{e_0}$

Attention : Si l'on trace $s(t)/e(t)$ en fonction du temps, K est alors directement la valeur finale

Détermination de z :

- $z = \sqrt{\frac{(\ln(D_1))^2}{\pi^2 + (\ln(D_1))^2}}$ avec $D_1 = \frac{S_{max} - S_{\infty}}{S_{\infty}}$

Détermination de ω_0 (après z):

- $\omega_0 = \frac{\pi}{t_1 \cdot \sqrt{1 - z^2}}$
- $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_a \cdot \sqrt{1 - z^2}}$