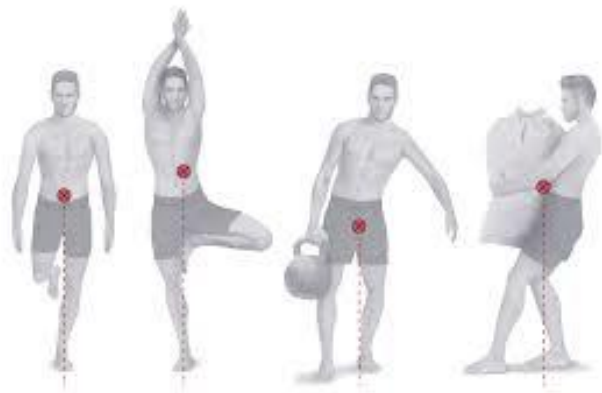
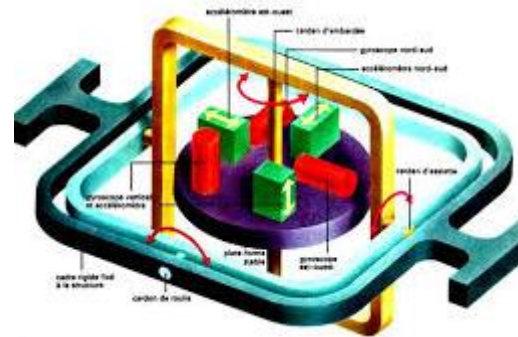


Cinétique du Solide



$$[I_Q(S)]_R = \begin{bmatrix} \int_S (y^2 + z^2) dm & -\int_S xy dm & -\int_S xz dm \\ -\int_S xy dm & \int_S (x^2 + z^2) dm & -\int_S yz dm \\ -\int_S xz dm & -\int_S yz dm & \int_S (x^2 + y^2) dm \end{bmatrix}_{Q,R} = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{Q,R}$$

$$\{Tc(S/R_g)\} = \left\{ \frac{Rc(S/R_g)}{\sigma(Q, S/R_g)} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \int_S \overrightarrow{V(P \in S/R_g)} dm(P) \\ \int_S \overrightarrow{QP} \wedge \overrightarrow{V(P \in S/R_g)} dm(P) \end{array} \right\}$$

Notion de solide

Définitions et hypothèses

- **Solide indéformable** :

$$\forall (Q, P) \text{ bipoint de } S^2, \quad \left(\frac{d\|\overrightarrow{QP}\|}{dt} \right)_{R_g} = 0$$

- **Solide homogène** : masse volumique $\rightarrow$ ne varie pas

Masse du solide conservative $\rightarrow$ la masse ne varie pas avec le temps.

$$\forall (Q, P) \in S^2, \quad \rho(P) = \rho(Q), \quad \left(\frac{d\rho(P)}{dt} \right)_{R_g} = 0$$

Notion de solide

Centre de masse / centre de gravité

Expérimentalement

**Comment mesurer
le centre de gravité
d'un casque d'avion
de chasse?**



Notion de solide

Centre de masse / centre de gravité

Expérimentalement

On suspend un casque d'avion de chasse à un fil, fixé successivement en A et B. On marque ainsi la continuité du fil par deux droites qui sont sécantes en un point.



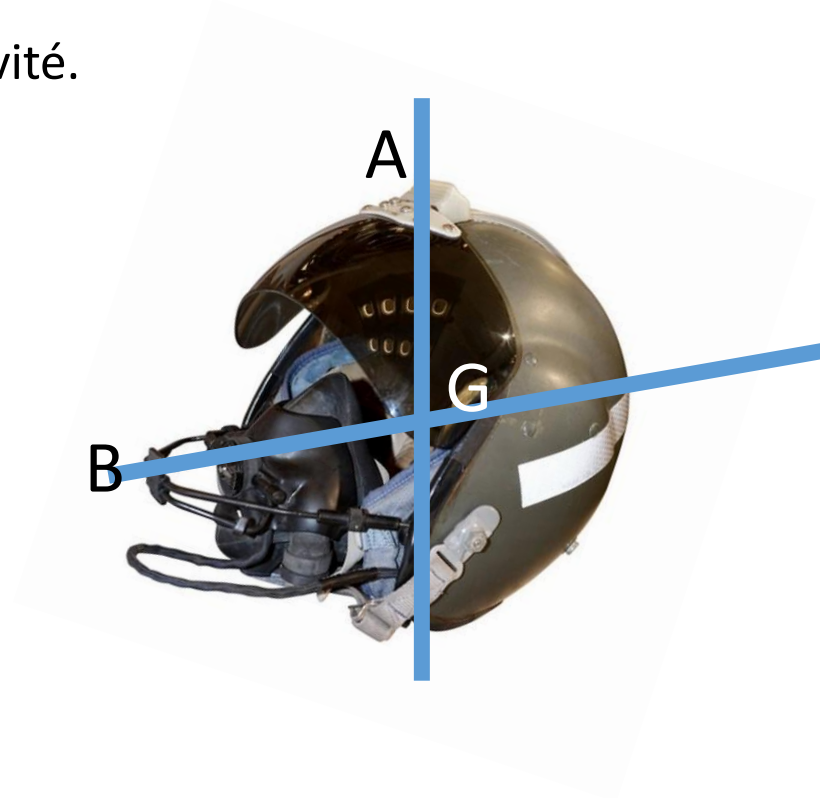
Notion de solide

Centre de masse / centre de gravité

Expérimentalement

Casque → soumis à 2 forces : Tension du fil + Poids

Point de concours = Centre de gravité.



Notion de solide

Centre de masse / centre de gravité

Analytiquement

- **Définition générale :**

Considérons un système de n points matériels P_i de masse m_i .

Le centre de masse G de cet ensemble est défini par le **barycentre** des points P_i affectés des coefficients m_i , c'est-à-dire :

$$M\overrightarrow{OG} = \sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{OP_i} \text{ ou } \sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{GP_i} = \vec{0}.$$

(O désigne un point quelconque et la masse M est égale à $\sum_{i=1}^n m_i$).



Notion de solide

Centre de masse / centre de gravité

Analytiquement

- **Définition générale :**

Solide $\rightarrow$ somme intégrale (découpe du solide en éléments dm arbitraires centrés sur les points $P + dm \rightarrow 0$):

$$\overrightarrow{MOG} = \int_S \overrightarrow{OP} dm \quad \text{ou} \quad \int_S \overrightarrow{GP} dm = \vec{0}$$



Notion de solide

Centre de masse / centre de gravité

Analytiquement

- Coordonnées du centre de masse :

On note $\overrightarrow{OG} = x_G \vec{x} + y_G \vec{y} + z_G \vec{z}$ et $\overrightarrow{OP} = x \vec{x} + y \vec{y} + z \vec{z}$

d'où
$$x_G = \frac{\int_{\Sigma} x \cdot dm}{M(\Sigma)} ; y_G = \frac{\int_{\Sigma} y \cdot dm}{M(\Sigma)} ; z_G = \frac{\int_{\Sigma} z \cdot dm}{M(\Sigma)}$$

Remarque : Si un solide admet un plan, un axe ou un centre de symétrie droite ou oblique, son centre de masse se trouve dans le plan, sur cet axe ou au centre de symétrie.



Notion de solide

Centre de masse / centre de gravité

Détermination du centre de masse d'un ensemble de solides S_i

Ensemble de solides Σ de masse M est constitué de n solides S_i de masse m_i ($M = \sum_{i=1}^n m_i$),
Centre de gravité G :

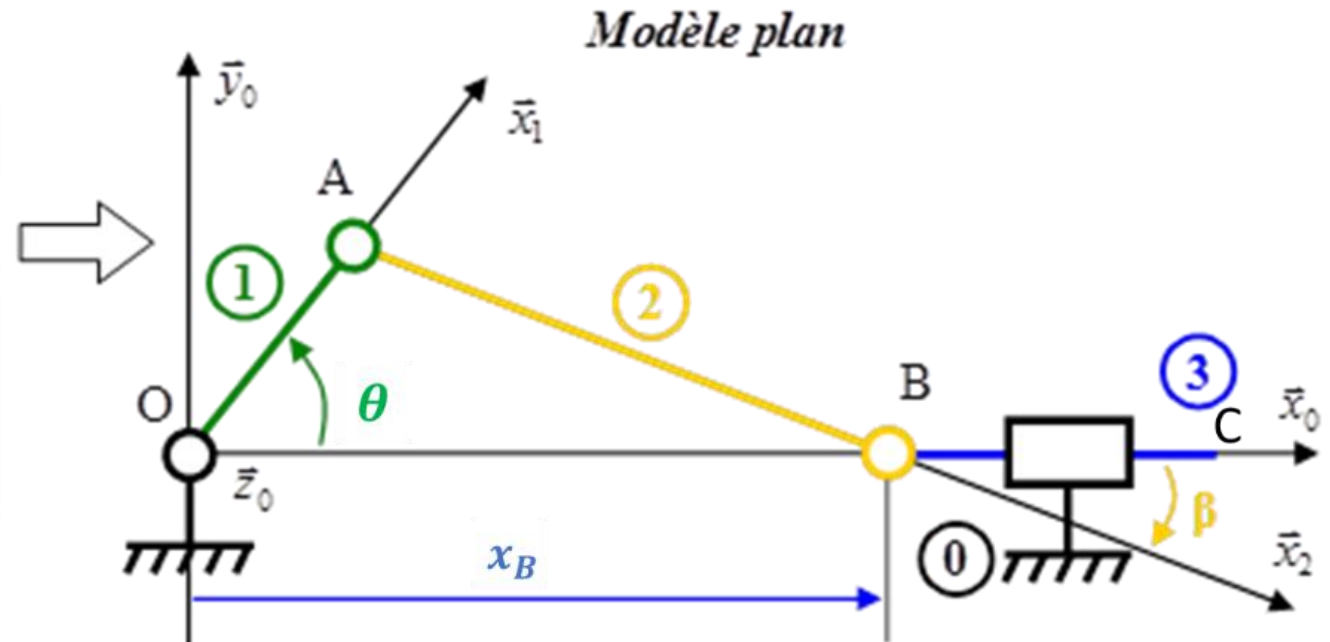
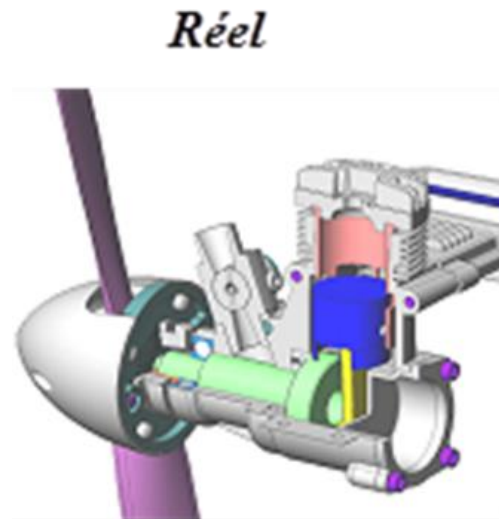
$$\left(\sum_{i=1}^n m_i\right)\overrightarrow{OG} = M\overrightarrow{OG} = \sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{OG_i} \text{ ou } \sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{GG_i} = \vec{0}$$

Notion de solide

Centre de masse / centre de gravité

Détermination du centre de masse d'un ensemble de solides S_i

Calculer le centre de gravité dans le plan $(\vec{x}_0, \vec{y}_0)$ du système bielle/manivelle/piston



Solide 1 (manivelle) : m_1 et $\|\vec{OA}\| = l_1$

Solide 2 (bielle) : m_2 et $\|\vec{AB}\| = l_2$

Solide 3 (piston) : m_3 et $\|\vec{BC}\| = l_3$

Le centre de gravité de chaque solide est confondu avec le centre géométrique des pièces.

Notion de solide

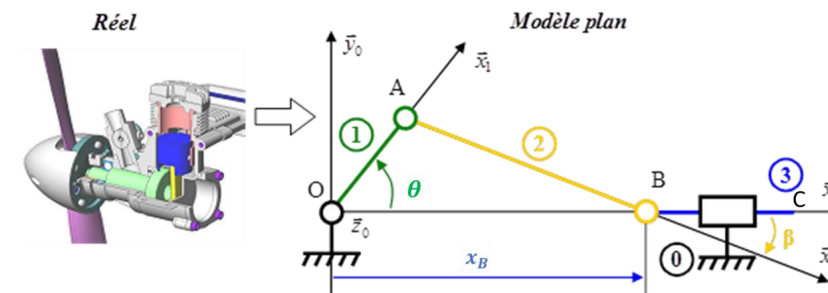
Centre de masse / centre de gravité

Détermination du centre de masse d'un ensemble de solides S_i

Solide 1 (manivelle) : m_1 et $\|\overrightarrow{OA}\| = l_1$

Solide 2 (bielle) : m_2 et $\|\overrightarrow{AB}\| = l_2$

Solide 3 (piston) : m_3 et $\|\overrightarrow{BC}\| = l_3$



$$x_B = l_1 \cos \theta + \sqrt{l_2^2 - l_1^2 \sin^2 \theta}$$

On rappelle la loi E/S du mécanisme : $x_B = l_1 \cos \theta + \sqrt{l_2^2 - l_1^2 \sin^2 \theta}$

$$\cos(\beta) = \frac{x_B - l_1 \cos(\theta)}{l_2} \text{ et } \sin(\beta) = -\frac{l_1 \sin(\theta)}{l_2}$$

On donne aussi : $\cos(\beta) = \frac{x_B - l_1 \cos(\theta)}{l_2}$ et $\sin(\beta) = -\frac{l_1 \sin(\theta)}{l_2}$

Notion de solide

Centre de masse / centre de gravité

Détermination du centre de masse d'un ensemble de solides S_i

Solide 1 (manivelle) : m_1 et $\|\overrightarrow{OA}\| = l_1$

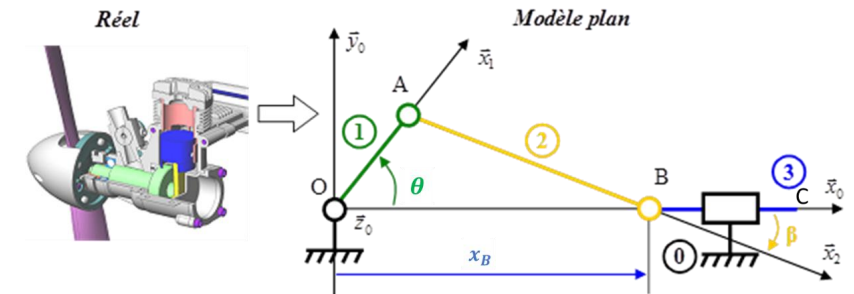
Solide 2 (bielle) : m_2 et $\|\overrightarrow{AB}\| = l_2$

Solide 3 (piston) : m_3 et $\|\overrightarrow{BC}\| = l_3$

$$\begin{cases} x_{G1} = \frac{l_1}{2} \cos(\theta) \\ y_{G1} = \frac{l_1}{2} \sin(\theta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{G2} = \frac{l_1}{2} \cos(\theta) + \frac{x_B}{2} \\ y_{G2} = \frac{l_1}{2} \sin(\theta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{G3} = x_B + \frac{l_3}{2} \\ y_{G3} = 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} x_{G1} = \frac{l_1}{2} \cos(\theta) \\ y_{G1} = \frac{l_1}{2} \sin(\theta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{G2} = \frac{l_1}{2} \cos(\theta) + \frac{x_B}{2} \\ y_{G2} = \frac{l_1}{2} \sin(\theta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{G3} = x_B + \frac{l_3}{2} \\ y_{G3} = 0 \end{cases}$$

Notion de solide

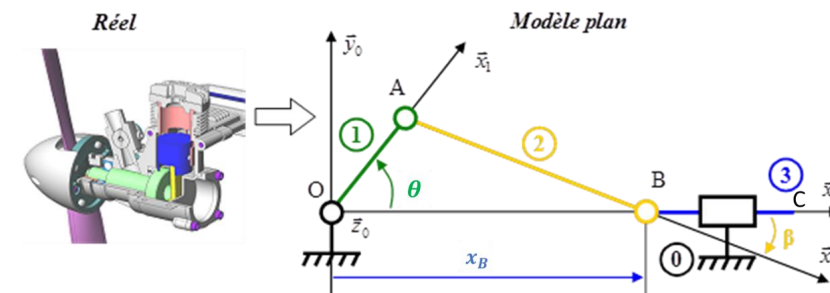
Centre de masse / centre de gravité

Détermination du centre de masse d'un ensemble de solides S_i

Solide 1 (manivelle) : m_1 et $\|\overrightarrow{OA}\| = l_1$

Solide 2 (bielle) : m_2 et $\|\overrightarrow{AB}\| = l_2$

Solide 3 (piston) : m_3 et $\|\overrightarrow{BC}\| = l_3$



$$\begin{cases} x_G = \frac{1}{m_1 + m_2 + m_3} \left((m_1 + m_2) \frac{l_1}{2} \cos(\theta) + \left(m_3 + \frac{m_2}{2} \right) x_B + m_3 \frac{l_3}{2} \right) \\ y_G = \frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_2 + m_3} \left(\frac{l_1}{2} \sin(\theta) \right) \end{cases}$$

$$x_B = l_1 \cos \theta + \sqrt{l_2^2 - l_1^2 \sin^2 \theta}$$

$$\cos(\beta) = \frac{x_B - l_1 \cos(\theta)}{l_2} \text{ et } \sin(\beta) = -\frac{l_1 \sin(\theta)}{l_2}$$

Notion de solide

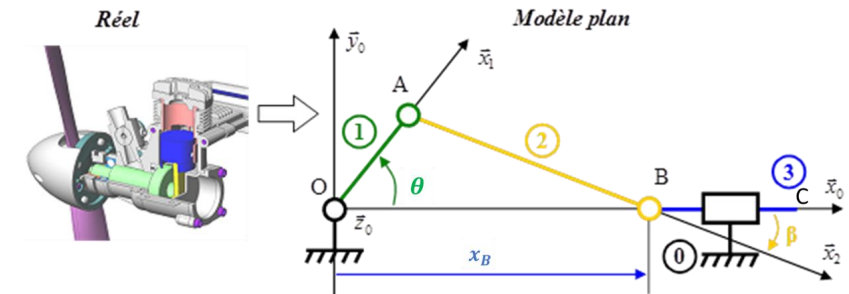
Centre de masse / centre de gravité

Détermination du centre de masse d'un ensemble de solides S_i

Solide 1 (manivelle) : m_1 et $\|\overrightarrow{OA}\| = l_1$

Solide 2 (bielle) : m_2 et $\|\overrightarrow{AB}\| = l_2$

Solide 3 (piston) : m_3 et $\|\overrightarrow{BC}\| = l_3$



$$x_B = l_1 \cos \theta + \sqrt{l_2^2 - l_1^2 \sin^2 \theta}$$

$$\cos(\beta) = \frac{x_B - l_1 \cos(\theta)}{l_2} \text{ et } \sin(\beta) = -\frac{l_1 \sin(\theta)}{l_2}$$

$$\begin{cases} x_G = \frac{1}{m_1 + m_2 + m_3} \left((m_1 + m_2) \frac{l_1}{2} \cos(\theta) + \left(m_3 + \frac{m_2}{2} \right) \left(l_1 \cos \theta + \sqrt{l_2^2 - l_1^2 \sin^2 \theta} \right) + m_3 \frac{l_3}{2} \right) \\ y_G = \frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_2 + m_3} \left(\frac{l_1}{2} \sin(\theta) \right) \end{cases}$$

Notion de solide

Etude d'une ligne matérielle plane

Centre de masse

Masse linéique $\mu = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta l}$ avec solides homogènes : $\mu = \text{cste.}$

Centre de masse : $L\overrightarrow{OG} = \int_L \overrightarrow{OP} dl$ ou $\int_L \overrightarrow{GP} dl = \vec{0}.$

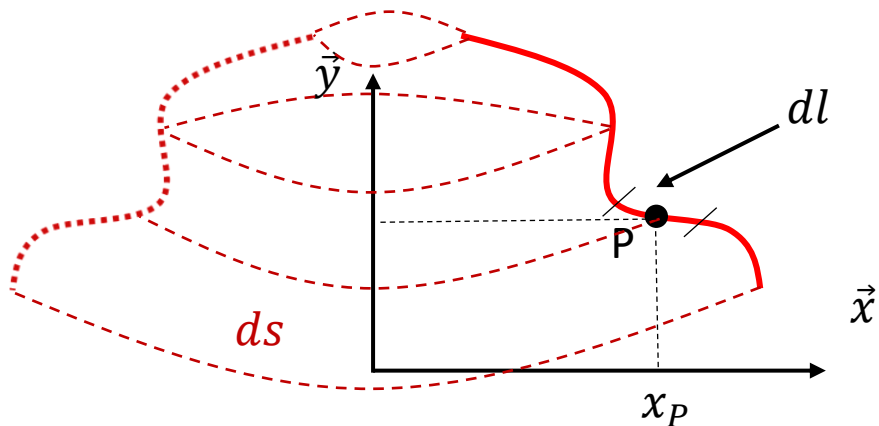
Notion de solide

Etude d'une ligne matérielle plane

Théorème de Guldin (Th n°1)

Le théorème de Guldin (n°1) → Centre de masse (ou centre d'inertie) d'une ligne plane.

Soit une courbe plane (C) de longueur L appartenant au plan $(O, \vec{x}, \vec{y})$ et **ne coupant pas l'axe** $(O, \vec{y})$.



Soit G le centre de masse de la courbe C.

Par définition : $M(\Sigma) \overrightarrow{OG} = \int_C \overrightarrow{OP} dm$ ou encore, $L \overrightarrow{OG} = \int_C \overrightarrow{OP} dl$

On projette l'équation sur l'axe $(O, \vec{x})$: $Lx_G = \int_C x_p dl$

Notion de solide

Etude d'une ligne matérielle plane

Théorème de Guldin (Th n°1)

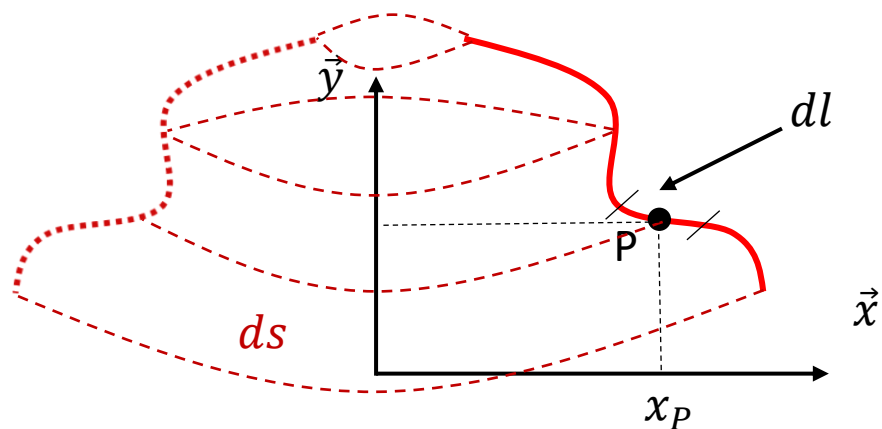
On fait tourner la ligne autour de l'axe $(O, \vec{y})$ et on regarde la surface engendrée :

$$2\pi \cdot L \cdot x_G = \int_C 2\pi \cdot x_p \cdot dl$$

L'élément dl de (C) centré sur le point P engendre la surface

$$ds = 2\pi \cdot x_p$$

$$\text{Et } S = \int_C ds$$



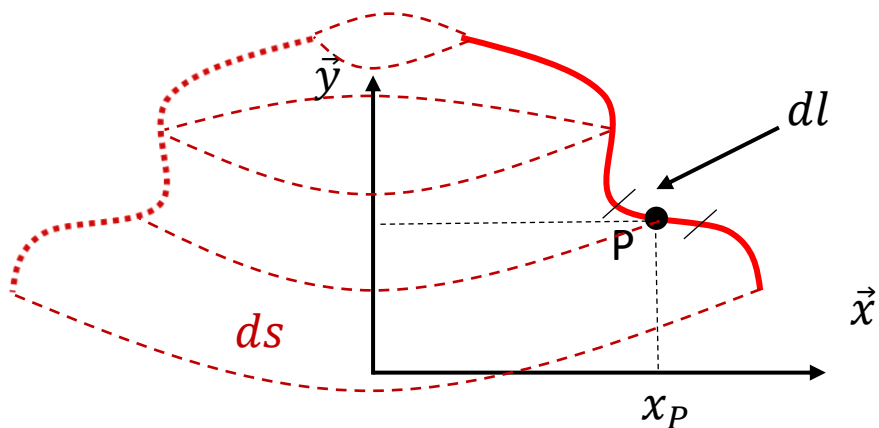
$$2\pi \cdot L \cdot x_G = \int_C 2\pi \cdot x_p \cdot dl = S$$

Notion de solide

Etude d'une ligne matérielle plane

Théorème de Guldin (Th n°1)

Th de Guldin : L'aire de la surface engendrée par une ligne C , de longueur L , tournant autour d'un axe Δ situé dans son plan et qui ne le coupe pas, est égal au produit de la longueur L par la circonférence décrite par le centre de masse G de la courbe C .

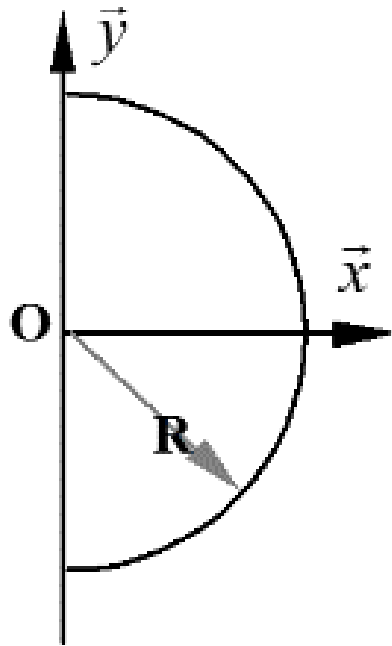


Notion de solide

Etude d'une ligne matérielle plane

Théorème de Guldin (Th n°1)

Exemple: Centre de masse d'une ligne matérielle homogène demi-circulaire (centre O, rayon R).



Nous avons $x_G = \frac{S}{2\pi L} = \frac{4\pi R^2}{2\pi \cdot \pi R}$ soit $x_G = \frac{2R}{\pi}$.

Notion de solide

Etude d'une ligne matérielle plane

Théorème de Guldin (Th n°1)

Exemple : Détermination de la surface totale d'un cône :

Montrer que $S_{lat} = \pi \cdot R \cdot \sqrt{R^2 + H^2}$ et donc que $S_{cône} = \pi \cdot R \cdot (\sqrt{R^2 + H^2} + R)$

Notion de solide

Etude d'une surface matérielle plane

Centre de masse

Masse surfacique $\sigma = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta S}$ pour une plaque homogène $\sigma = \text{cste}$.

Centre de masse :

$$S \cdot \overrightarrow{OG} = \int_S \overrightarrow{OP} ds \text{ ou encore } \int_S \overrightarrow{GP} ds = \vec{0}.$$

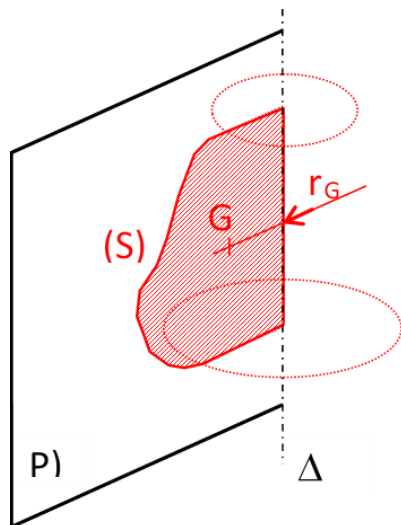
Notion de solide

Etude d'une surface matérielle plane

Théorème de Guldin (Th n°2)

Le théorème de Guldin (n°2) permet de déterminer le centre de masse (ou centre d'inertie) d'une surface plane.

Soit une surface plane (S) de surface S appartenant au plan $(O, \vec{x}, \vec{y})$ et **ne coupant pas l'axe** $(O, \vec{y})$.



Soit G le centre de masse de la surface S, par définition :

$$M(\Sigma)\overrightarrow{OG} = \int_S \overrightarrow{OP} dm \quad \text{ou encore,} \quad S \cdot \overrightarrow{OG} = \int_S \overrightarrow{OP} ds$$

On projette l'équation sur l'axe $(O, \vec{x})$: $S \cdot x_G = \int_S x_p ds$

Idem théorème n°1 :

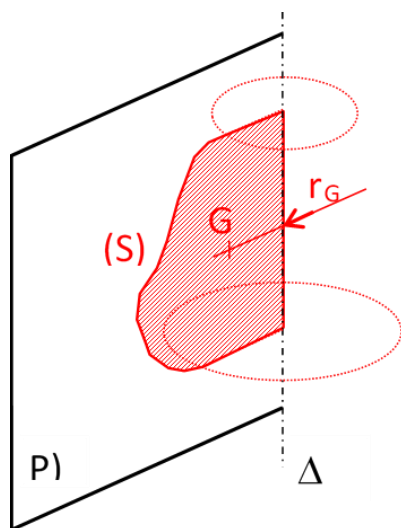
$$2\pi \cdot S \cdot x_G = \int_S 2\pi \cdot x_p \cdot ds = V$$

Notion de solide

Etude d'une surface matérielle plane

Théorème de Guldin (Th n°2)

Th de Guldin : Le volume engendré par la surface S , de surface S , tournant autour d'un axe Δ situé dans son plan et qui ne le coupe pas, est égal au produit de la surface S par la circonférence décrite par le centre de masse G de la surface S .



Notion de solide

Etude d'une surface matérielle plane

Théorème de Guldin (Th n°2)

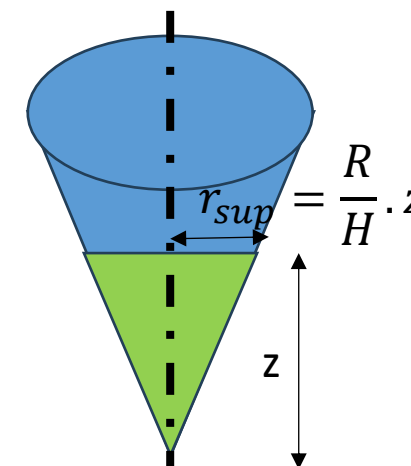
Exemple : Détermination du volume d'un cône :

Montrer que $V_{\text{cône}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot H$

On peut également le démontrer par intégration :

$$V_{\text{cône}} = \int_V r \cdot d\theta \cdot dr \cdot dz = \int_0^H \int_0^{r_{\text{sup}}} \int_0^{2\pi} r \cdot d\theta \cdot dr \cdot dz = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot H \quad \text{avec } r_{\text{sup}} = \frac{R}{H} \cdot z$$

(car la borne d'intégration du rayon dépend de l'altitude du disque).



Notion de solide

Etude d'une surface matérielle plane

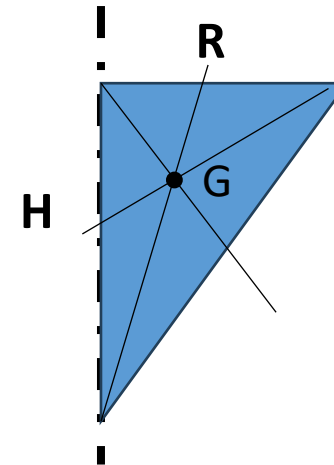
Théorème de Guldin (Th n°2)

Exemple : Détermination du volume d'un cône :

Montrer que $V_{\text{cône}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot H$

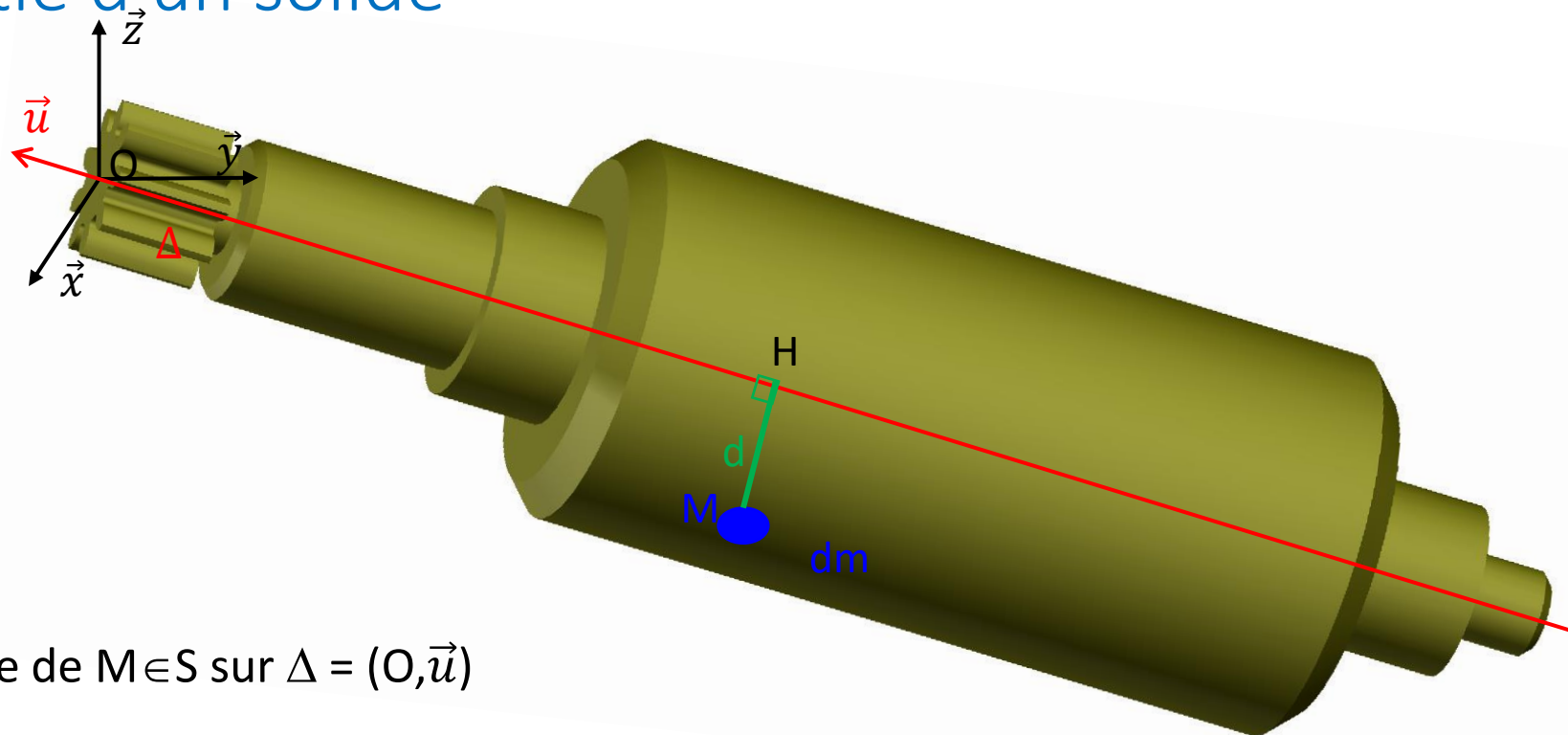
Ou avec le théorème de Guldin n°2 :

$$V_{\text{cône}} = 2\pi \cdot S \cdot x_G = 2\pi \cdot \left(\frac{R \cdot H}{2}\right) \cdot \frac{R}{3} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot H$$



Moment d'inertie autour d'un axe

Moment d'inertie d'un solide



- Par rapport à un axe Δ :

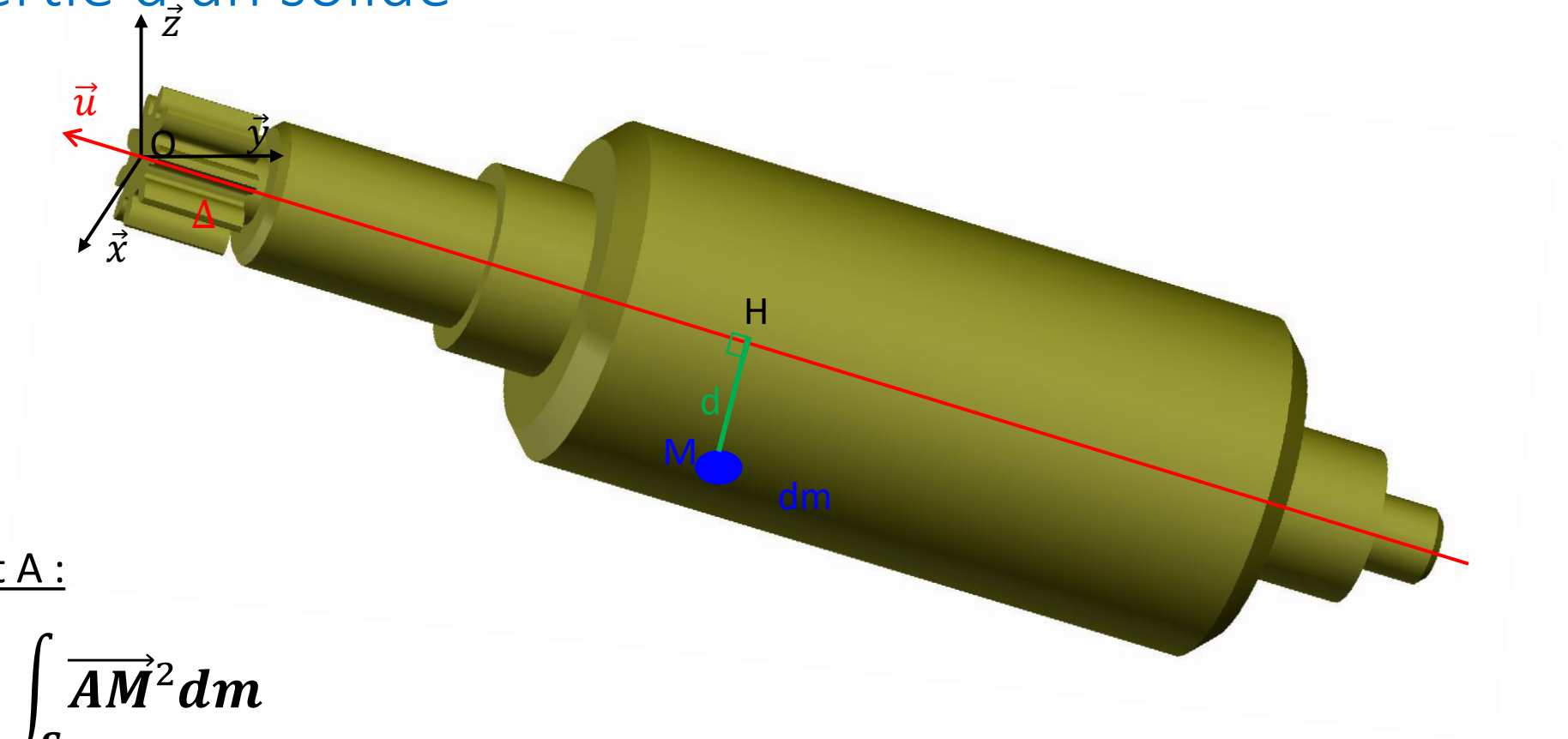
H = projection orthogonale de $M \in S$ sur $\Delta = (O, \vec{u})$

$$I(S, \Delta) = \int_S \overrightarrow{MH}^2 dm = \int_S d^2 dm = I_{ou}(S)$$

d = distance de M à l'axe Δ

Moment d'inertie autour d'un axe

Moment d'inertie d'un solide

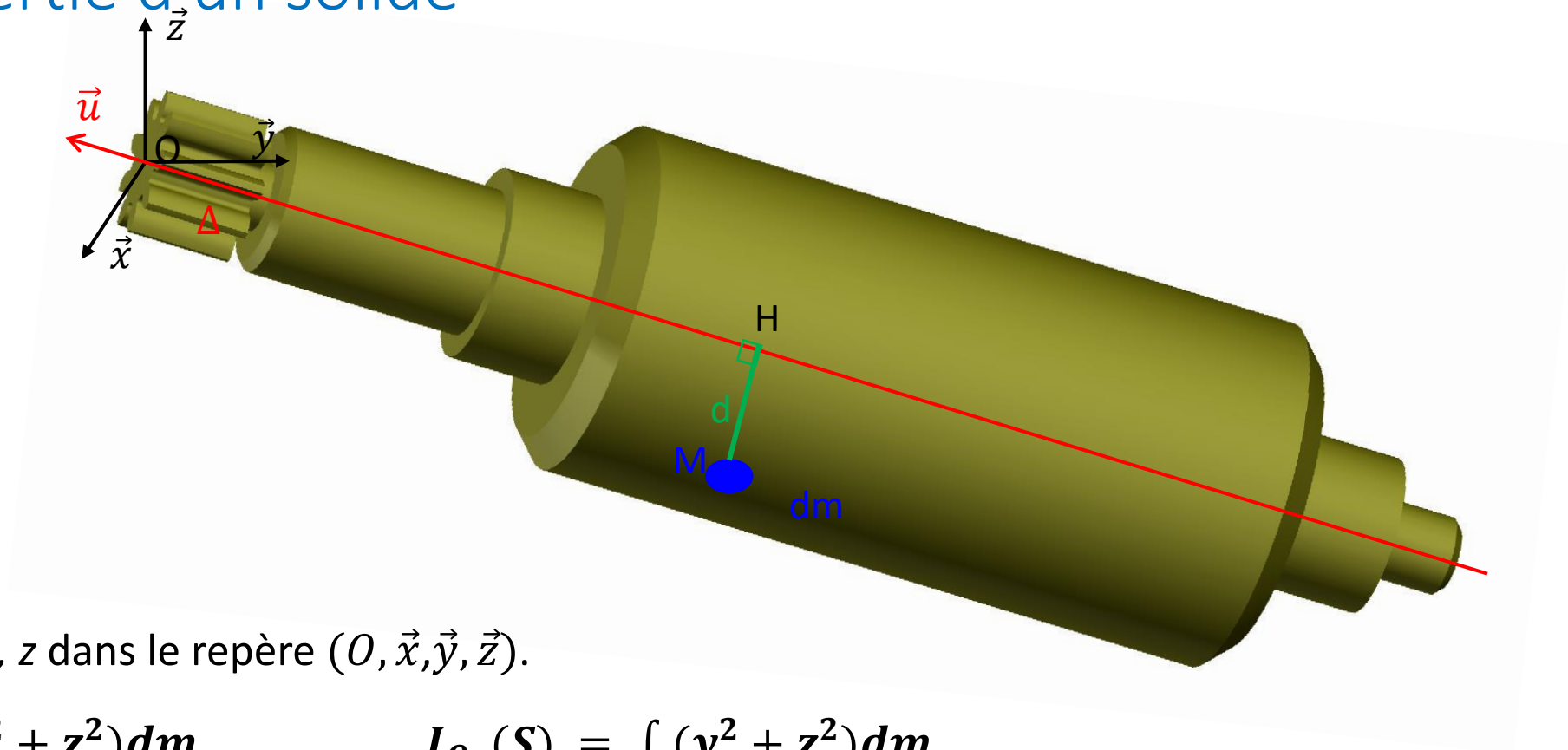


- Par rapport à un point A :

$$I_A(S) = \int_S \overline{AM}^2 dm$$

Moment d'inertie autour d'un axe

Moment d'inertie d'un solide



Soit M de coordonnées x, y, z dans le repère $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

$$I_O(S) = \int_S (x^2 + y^2 + z^2) dm$$

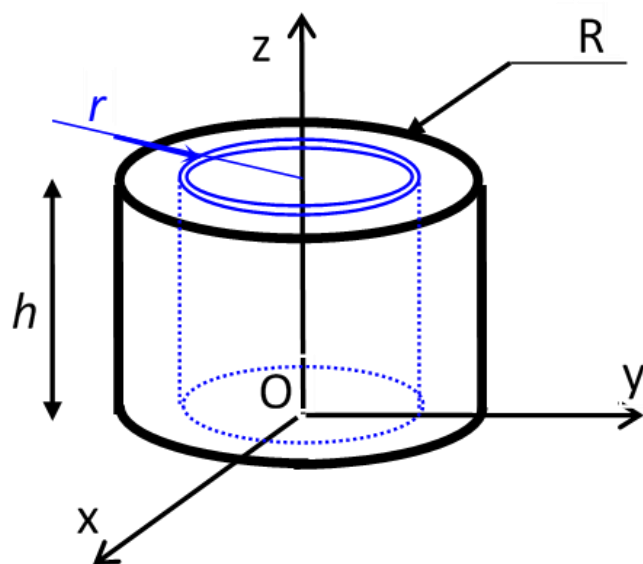
$$I_{Ox}(S) = \int_S (y^2 + z^2) dm$$

Remarque : Unité : **kg.m²**

Moment d'inertie autour d'un axe

Moment d'inertie d'un solide

Exemple 1 : Déterminer I_{Oz} pour le cylindre de révolution de rayon R , de hauteur h et de masse m .



$$I_{Oz}(S) = \int_S (x^2 + y^2) dm \Rightarrow \text{coordonnées polaires}$$

$$= \int_S r^2 dm \quad \text{avec} \quad dm = \rho dv = \rho 2\pi r h dr$$

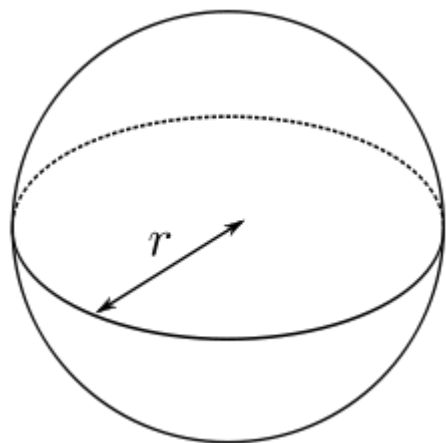
(en regroupant tous les points M à même distance r de Oz)

$$= \int_S \rho 2\pi r^3 h dr = 2\pi \rho h \frac{R^4}{4} \Rightarrow \mathbf{I_{Oz} = m \frac{R^2}{2}}$$

Moment d'inertie autour d'un axe

Moment d'inertie d'un solide

Exemple 2 : Déterminer le moment d'inertie d'une sphère de rayon R , de masse m par rapport à son centre O puis par rapport à un diamètre Δ quelconque.



$$I_O = \int_S r^2 dm \quad \text{avec } dm = \rho dv = \rho d\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = \rho 4\pi r^2 dr$$

$$I_O = \int_S \rho 4\pi r^4 dr = \rho 4\pi \frac{R^5}{5} = \frac{3}{5} m R^2$$

$$\text{Or } I_{\Delta} = I_{ox} = I_{oy} = I_{oz} \text{ par symétrie} \quad \text{et} \quad I_{ox} + I_{oy} + I_{oz} = 2 I_O = 3 I_{\Delta}$$

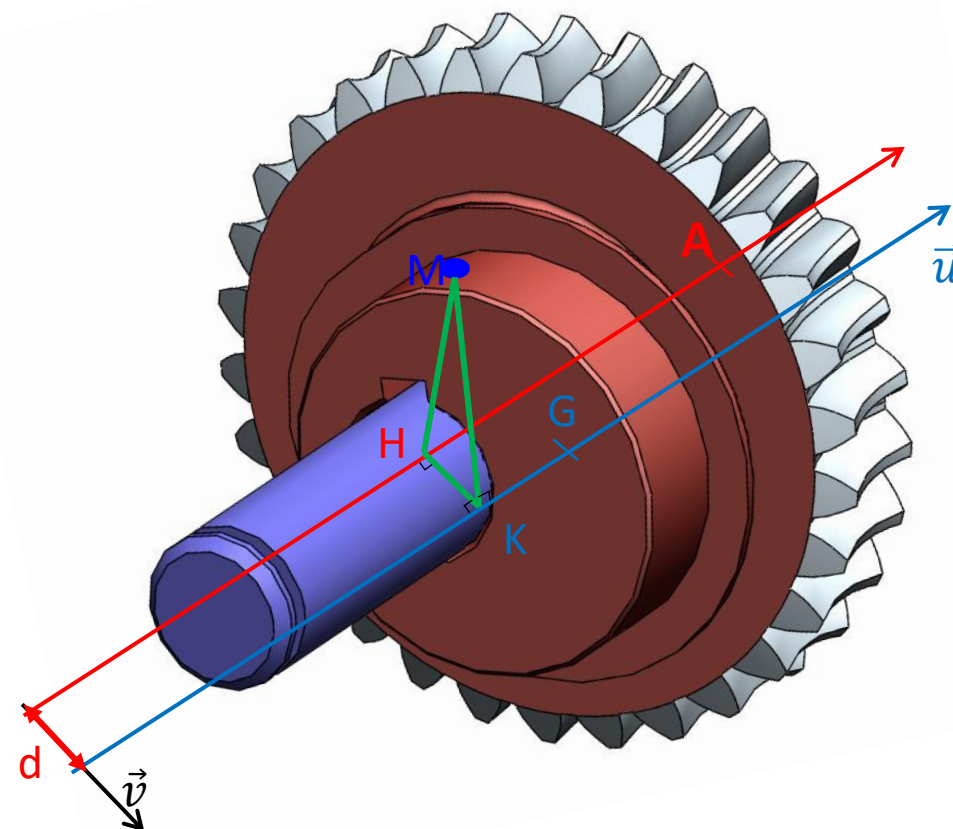
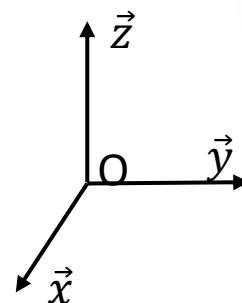
$$\text{d'où } I_{\Delta} = \frac{2}{5} m R^2$$

Moment d'inertie autour d'un axe

Théorème de Huygens

Soit un axe $\vec{u}$ passant par le centre de gravité G d'un solide S et un axe parallèle à la distance d passant par le point A.

On cherche la relation entre $I_{Gu}(S)$ et $I_{Au}(S)$.



$$I_{Au}(S) = \int_S \overline{HM}^2 dm = \int_S (\overline{HK} + \overline{KM})^2 dm \quad (\text{par définition})$$

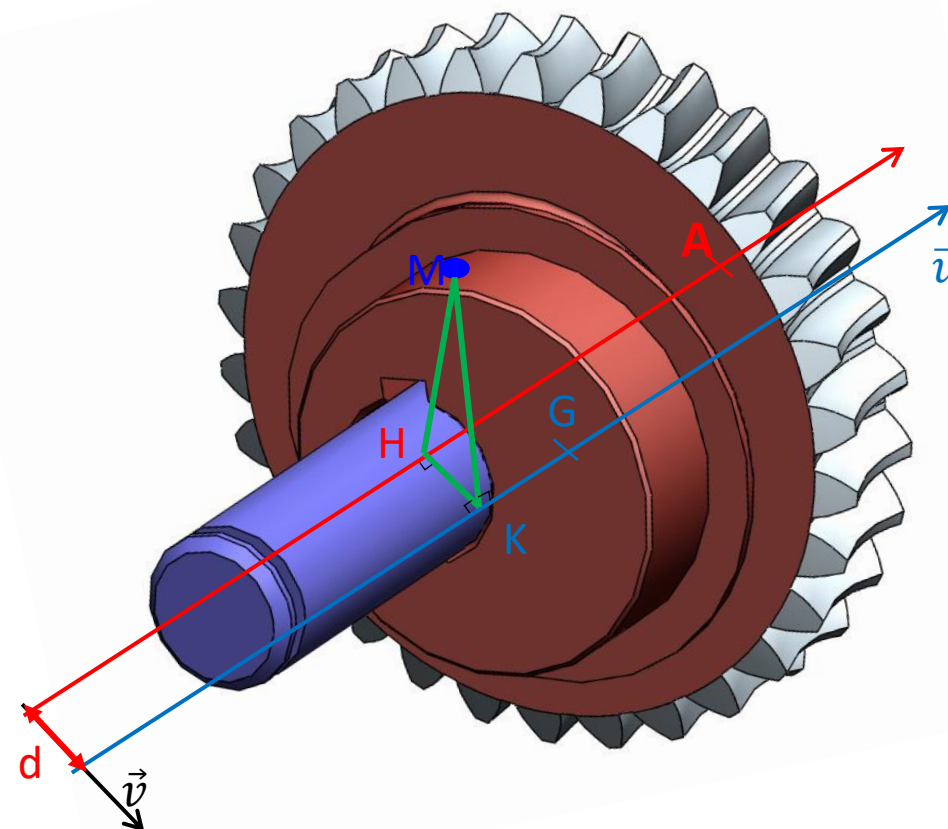
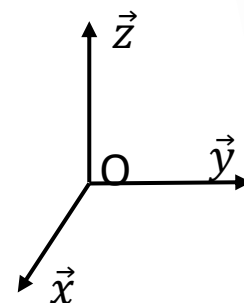
$$I_{Au}(S) = \int_S \overline{HK}^2 dm + \int_S \overline{KM}^2 dm + 2 \cdot \int_S \overline{HK} \cdot \overline{KM} dm$$

$$I_{Au}(S) = md^2 + I_{Gu}(S) + 2 \cdot \int_S \overline{HK} \cdot \overline{KM} dm \quad (\text{définitions précédentes + figure + } \overline{KM} = \overline{KG} + \overline{GM})$$

$$I_{Au}(S) = md^2 + I_{Gu}(S) + 2 \cdot \int_S \overline{HK} \cdot \overline{KG} dm + 2 \cdot \int_S \overline{HK} \cdot \overline{GM} dm$$

Moment d'inertie autour d'un axe

Théorème de Huygens



$$I_{Au}(S) = md^2 + I_{Gu}(S) + 2. \int_S \overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{KG} dm + 2. \int_S \overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{GM} dm$$

Or $\overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{KG}$ sont orthogonaux et $2. \int_S \overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{GM} dm = 2. d. \vec{v} \int_S \overrightarrow{GM} dm = \vec{0}$ (par définition du centre de gravité).

D'où :

$$I_{Au}(S) = I_{Gu}(S) + md^2$$

Moment d'inertie autour d'un axe

Matrice d'inertie (ou tenseur d'inertie) d'un solide en Q

Repère R associé au solide :

$$\overrightarrow{QP} = x.\vec{x} + y.\vec{y} + z.\vec{z}$$

$$\vec{u} = p.\vec{x} + q.\vec{y} + r.\vec{z}$$

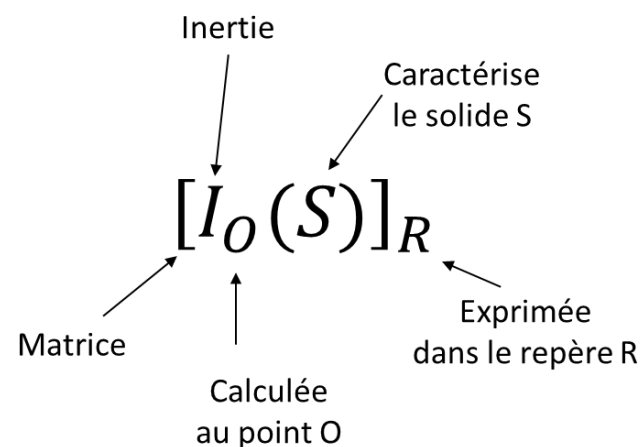
Cette matrice est ici définie dans un repère R associé au solide.

$$[I_Q(S)]_R = \begin{bmatrix} \int_S (y^2 + z^2) dm & -\int_S xy dm & -\int_S xz dm \\ -\int_S xy dm & \int_S (x^2 + z^2) dm & -\int_S yz dm \\ -\int_S xz dm & -\int_S yz dm & \int_S (x^2 + y^2) dm \end{bmatrix}_{Q,R} = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{Q,R}$$

Moment d'inertie autour d'un axe

Matrice d'inertie (ou tenseur d'inertie) d'un solide en Q

$$[I_Q(S)]_R = \begin{bmatrix} \int_S (y^2 + z^2) dm & -\int_S xy dm & -\int_S xz dm \\ -\int_S xy dm & \int_S (x^2 + z^2) dm & -\int_S yz dm \\ -\int_S xz dm & -\int_S yz dm & \int_S (x^2 + y^2) dm \end{bmatrix}_{Q,R} = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{Q,R}$$



Moment d'inertie autour d'un axe

Matrice d'inertie (ou tenseur d'inertie) d'un solide en Q

$$[I_Q(S)]_R = \begin{bmatrix} \int_S (y^2 + z^2) dm & -\int_S xy dm & -\int_S xz dm \\ -\int_S xy dm & \int_S (x^2 + z^2) dm & -\int_S yz dm \\ -\int_S xz dm & -\int_S yz dm & \int_S (x^2 + y^2) dm \end{bmatrix}_{Q,R} = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{Q,R}$$

Dans la plupart des cas, on pourra omettre la notation avec le repère R pour alléger les notations.

Remarque : Si on demande de calculer E, il n'y a pas de signe « moins ».

Moment d'inertie du solide S par rapport à un axe $\vec{u}$ passant par Q :

$$I_{Qu}(S) = \vec{u} \cdot [I_Q(S)] \vec{u} \qquad I_{Quv}(S) = \vec{u} \cdot [I_Q(S)] \vec{v}$$

Attention : La matrice d'inertie d'un solide est calculée en **un point** et **dans un repère lié au solide**.

Moment d'inertie autour d'un axe

Particularités de l'opérateur

Conventions

$R = (Q, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) :$

- A, B et C $\rightarrow$ Moments d'inertie par rapport aux axes $(Q, \vec{x})$, $(Q, \vec{y})$ et $(Q, \vec{z})$.
- D, E et F $\rightarrow$ Produits d'inerties par rapport aux plans $(Q, \vec{y}, \vec{z})$, $(Q, \vec{x}, \vec{z})$, $(Q, \vec{x}, \vec{y})$.

Moment d'inertie autour d'un axe

Particularités de l'opérateur

Extensions

Moment d'inertie en le définissant par rapport à un élément géométrique quelconque :

$$I(S/(Q, \vec{y}, \vec{z})) = \int_S x^2 dm \quad \text{et} \quad I(S/(Q, \vec{x}, \vec{z})) = \int_S y^2 dm$$

Somme des moments d'inertie par rapport à deux plans orthogonaux

$$I(S/(Q, \vec{x}, \vec{z})) + I(S/(Q, \vec{y}, \vec{z})) = I(S/(Q, \vec{z})) = C$$

Somme des moments d'inertie par rapport à trois plans orthogonaux

$$I(S/(Q, \vec{x}, \vec{z})) + I(S/(Q, \vec{y}, \vec{z})) + I(S/(Q, \vec{x}, \vec{y})) = I(S/Q) = \frac{1}{2} (A + B + C)$$

Moment d'inertie autour d'un axe

Particularités de l'opérateur

Repères particuliers

Matrice d'inertie d'un solide $\rightarrow$ symétrique + vecteurs propres orthogonaux $\rightarrow$ **Repère Principal d'Inertie**.

Lorsqu'un solide possède un élément de symétrie (plan, droite, point), cet élément fait partie du repère principal d'inertie.

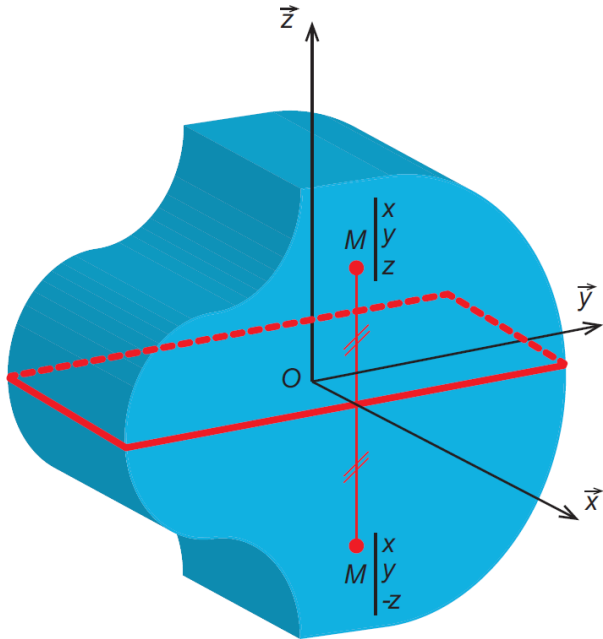
De plus, le CdG (G) appartient à cet élément de symétrie.

Moment d'inertie autour d'un axe

Propriétés de la matrice d'inertie – Cas particuliers de solides

Un Plan de symétrie $(Q, \vec{x}, \vec{y})$:

L'axe perpendiculaire à ce plan (*donc* $\vec{z}$) est principal d'inertie.

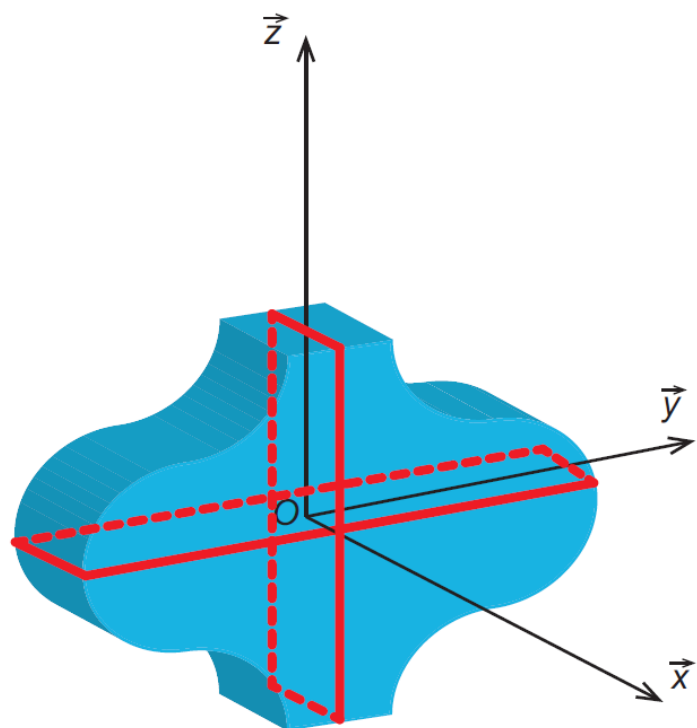


$$D=0 \text{ et } E=0 \rightarrow \begin{bmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{Qxyz}$$

Moment d'inertie autour d'un axe

Propriétés de la matrice d'inertie – Cas particuliers de solides

Deux Plans de symétrie $(Q, \vec{x}, \vec{y})$ et $(Q, \vec{x}, \vec{z})$:

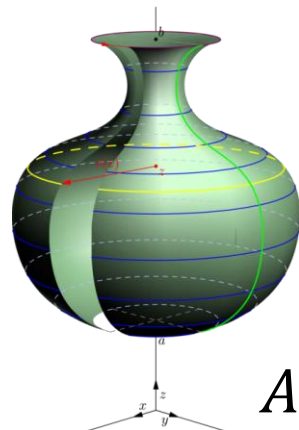
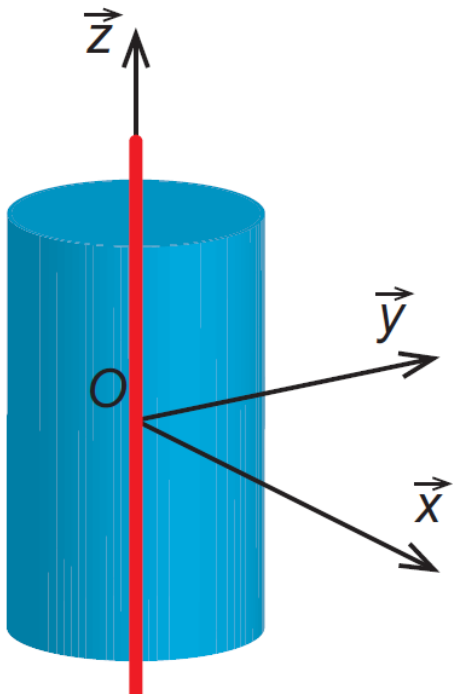


$$D=0 \text{ et } E=0 \text{ et } F=0 \rightarrow \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{Qxyz}$$

Moment d'inertie autour d'un axe

Propriétés de la matrice d'inertie – Cas particuliers de solides

Un axe de Révolution ($Q, \vec{z}$) :



$$A = B \text{ et } D=0 \text{ et } E=0 \text{ et } F=0 \rightarrow \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{Qz}$$

$$A + B = 2A = 2B = C + 2 \cdot \int_S z^2 dm = \int_S r^2 dm + 2 \cdot \int_S z^2 dm$$

Moment d'inertie autour d'un axe

Propriétés de la matrice d'inertie – Cas particuliers de solides

Un centre de symétrie sphérique (G forcément) :



$$A=B=C \text{ et } D=0 \text{ et } E=0 \text{ et } F=0 \rightarrow \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix}_Q$$

$$A + B + C = 3A = 3B = 3C = 2 \cdot \int_S r^2 dm$$

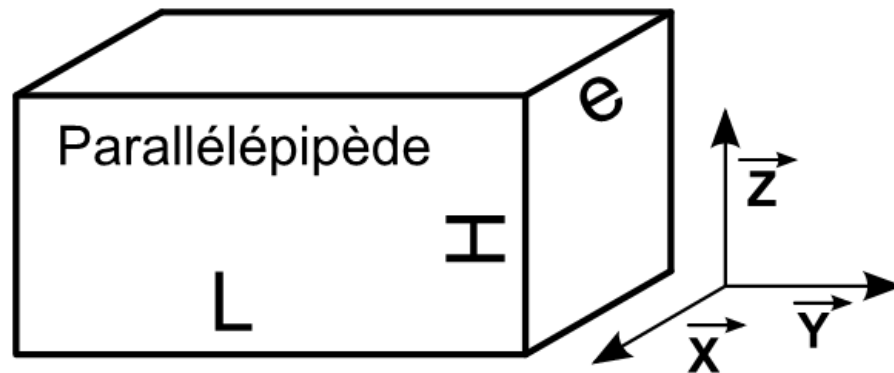
Remarques :

- Le repère dans lequel est exprimé la matrice d'inertie est très important.
- La matrice a la même forme (mais pas forcément les mêmes valeurs) quel que soit le point de l'axe où elle est calculée et **le moment d'inertie autour de l'axe est constant quel que soit le point de calcul tant que l'on reste sur l'axe.**

Moment d'inertie autour d'un axe

Les solides élémentaires

Parallélépipède en G



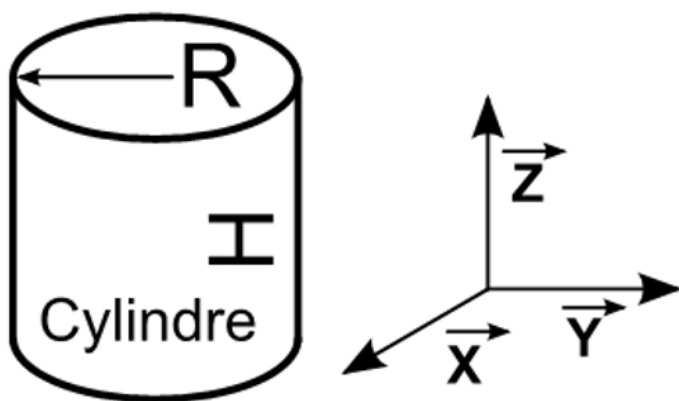
3 plans de symétrie ($D = E = F = 0$).

$$\begin{bmatrix} M \frac{H^2 + L^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & M \frac{H^2 + e^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & M \frac{L^2 + e^2}{12} \end{bmatrix}_{G,R}$$

Moment d'inertie autour d'un axe

Les solides élémentaires

Cylindre en G



Axe de révolution G_z : $A = B$ et $D = E = F = 0$.

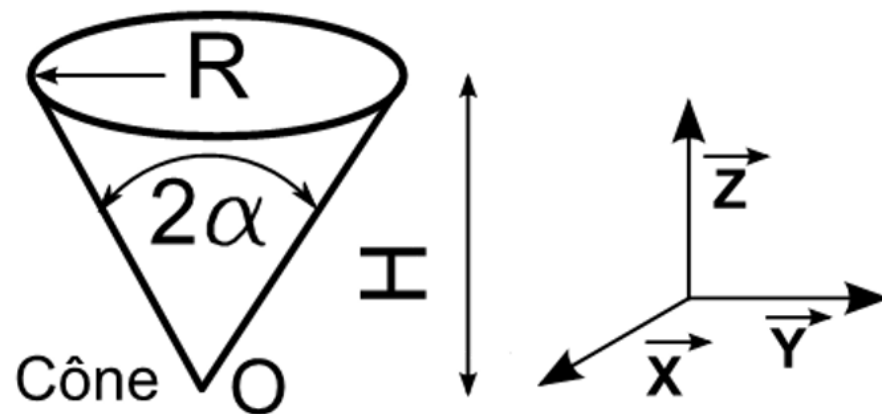
$$\begin{bmatrix} M\left(\frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{12}\right) & 0 & 0 \\ 0 & M\left(\frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{12}\right) & 0 \\ 0 & 0 & M\frac{R^2}{2} \end{bmatrix}_{G,z}$$

Pour tous les solides de révolution : $A = B$ et $A + B = 2 A = 2 B = C + 2 \int_S z^2 dm$

Moment d'inertie autour d'un axe

Les solides élémentaires

Cône en O (sommet)



Hauteur H sur $\vec{z}$ et base circulaire de rayon R.

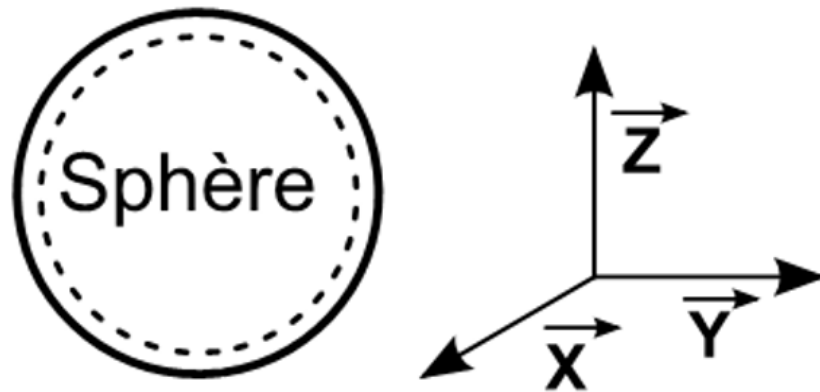
Utiliser des disques d'épaisseur dr dont le rayon varie avec z .

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{20}M(R^2 + 4H^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{20}M(R^2 + 4H^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{10}MR^2 \end{bmatrix}_{G,z}$$

Moment d'inertie autour d'un axe

Les solides élémentaires

Sphère en G



Rayon R constant et épaisseur négligeable

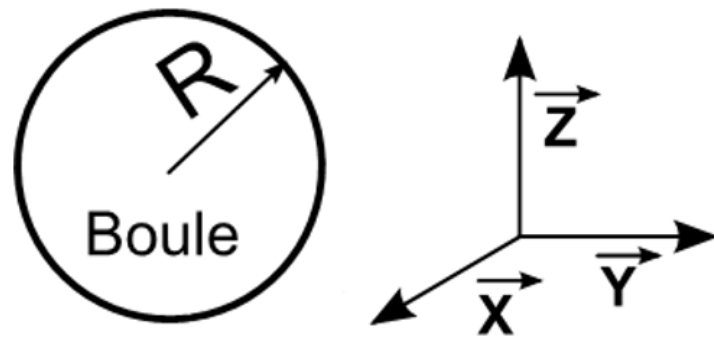
Calcul en G : $A + B + C = 3A = 2 \cdot \int_S r^2 dm = 2 M R^2$

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3}MR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3}MR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}MR^2 \end{bmatrix}_G$$

Moment d'inertie autour d'un axe

Les solides élémentaires

Boule en G



Rayon R (Idem Sphère et utiliser une sphère creuse d'épaisseur dr).

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{5}MR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5}MR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5}MR^2 \end{bmatrix}_G$$

Moment d'inertie autour d'un axe

Théorème de Huygens

Ce théorème donne la relation existante entre $[I_G(S)]$, matrice d'inertie du solide S au centre de gravité G , et $[I_Q(S)]$, matrice d'inertie en un point Q quelconque tel que $\overrightarrow{QG} = \mathbf{a} \vec{x} + \mathbf{b} \vec{y} + \mathbf{c} \vec{z}$

$$[I_Q(S)] = [I_G(S)] + m \begin{bmatrix} b^2 + c^2 & -ab & -ac \\ -ab & a^2 + c^2 & -bc \\ -ac & -bc & a^2 + b^2 \end{bmatrix}$$

$$[I_Q(S)] = [I_G(S)] + m [\overrightarrow{QG}^2]$$

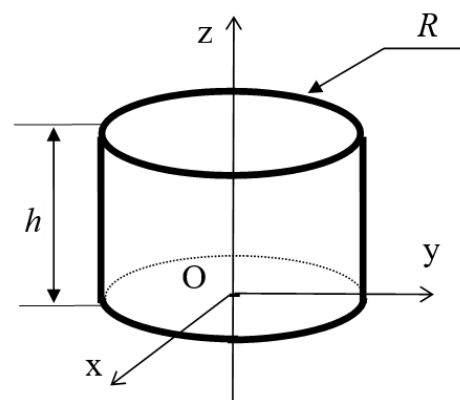
ATTENTION : Cette relation n'est valable qu'entre G et un autre point !!!

Moment d'inertie autour d'un axe

Théorème de Huygens

Remarque : Le **déplacement** de matrice ne s'utilise que pour pouvoir **trouver la matrice d'un solide constitué de volumes élémentaires** ET/OU dans le cas où l'on déplace en un **point du solide qui reste fixe** au cours du mouvement.

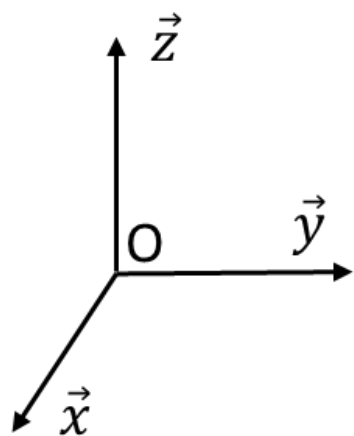
Exemple :



$$\begin{pmatrix} m(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{3}) & 0 & 0 \\ 0 & m(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{3}) & 0 \\ 0 & 0 & m\frac{R^2}{2} \end{pmatrix}_{-, -, z}$$

Moment d'inertie autour d'un axe

Cas d'un solide complexe composé de solides élémentaires



$$\Sigma = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 - \mathbf{S}_3$$

$$[I_O(\Sigma)]_R = [\mathbf{I}_O(\mathbf{S}_1)]_R + [\mathbf{I}_O(\mathbf{S}_2)]_R - [\mathbf{I}_O(\mathbf{S}_3)]_R$$

Attention : Il est possible de **sommer les matrices d'inertie** au **même point** et dans le **même repère**.

Torseur cinétique (quantités de mouvements)

$$\{C(S/R_g)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{Rc(S/R_g)} \\ \overrightarrow{\sigma(Q, S/R_g)} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \int_S \overrightarrow{V(P \in S/R_g)} dm(P) \\ \int_S \overrightarrow{QP} \wedge \overrightarrow{V(P \in S/R_g)} dm(P) \end{array} \right\}$$

Résultante cinétique
Moment cinétique en Q

Torseur cinétique (quantités de mouvements)

Résultante cinétique (résultante du torseur)

$$\overrightarrow{R_c(S/R_g)} = M_S \overrightarrow{V(G \in S/R_g)}$$

$\overrightarrow{R_c(S/R_g)}$ ne dépend que de G, c'est un invariant vectoriel, caractéristique d'une résultante de torseur.

Torseur cinétique (quantités de mouvements)

Moment cinétique (moment du torseur)

$$\overrightarrow{\sigma(A, S/R_g)} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{R_c(S/R_g)} + \overrightarrow{\sigma(B, S/R_g)}$$

$\overrightarrow{\sigma(Q, S/R_g)}$ est bien un champ de moment d'un torseur.

$$\overrightarrow{\sigma(Q, S/R_g)} = M_S \overrightarrow{QG} \wedge \overrightarrow{V(Q \in S/R_g)} + [I_Q(S)](\overrightarrow{\Omega_{S/R_g}})$$

Torseur cinétique (quantités de mouvements)

Moment cinétique (moment du torseur)

Cas particuliers :

$$Q \text{ fixe dans } R_g \rightarrow \overrightarrow{\sigma(Q, S/R_g)} = [I_Q(S)](\overrightarrow{\Omega_{S/R_g}})$$

$$G = Q \rightarrow \overrightarrow{\sigma(G, S/R_g)} = [I_G(S)](\overrightarrow{\Omega_{S/R_g}})$$

Torseur cinétique (quantités de mouvements)

Moment cinétique (moment du torseur)

Remarques :

- Dans la plupart des calculs, nous essaierons de nous placer au point G pour des soucis de simplification de l'expression du moment cinétique
- Dans le cas où **Q appartient au solide** et est fixe, il faudra utiliser les méthodes précédentes pour les changements de point (Théorème de Huygens, ...)
- Si le moment cinétique doit être déterminé en A alors que l'opérateur d'inertie est donné en Q : on calcule le moment cinétique là où on connaît l'opérateur d'inertie, ici en Q puis on réduit le moment cinétique en A par la relation de moment.

On obtient alors la relation générale suivante :

$$\overrightarrow{\sigma(A, S/R_g)} = M_S \overrightarrow{QG} \wedge \overrightarrow{V(Q \in S/R_g)} + [I_Q(S)](\overrightarrow{\Omega_{S/R_g}}) + \overrightarrow{AQ} \wedge M_S \overrightarrow{V(G \in S/R_g)}$$

