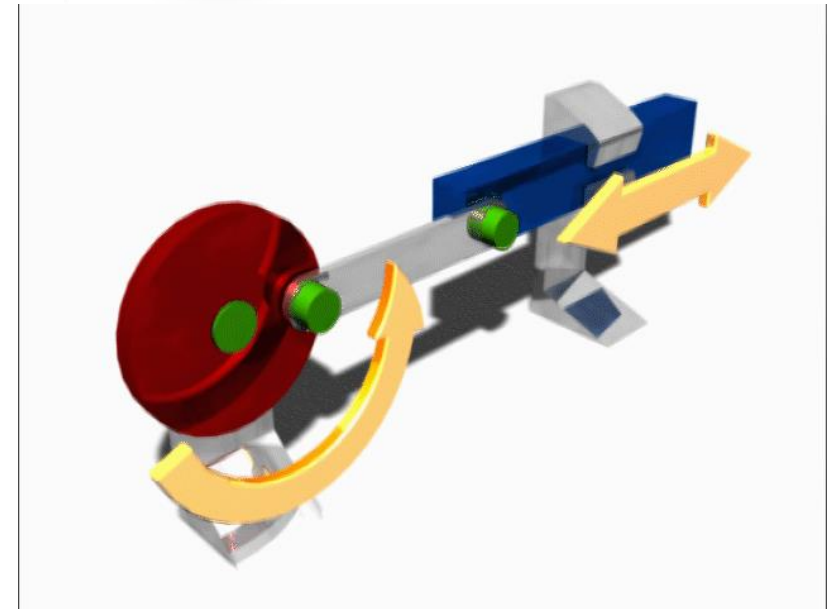
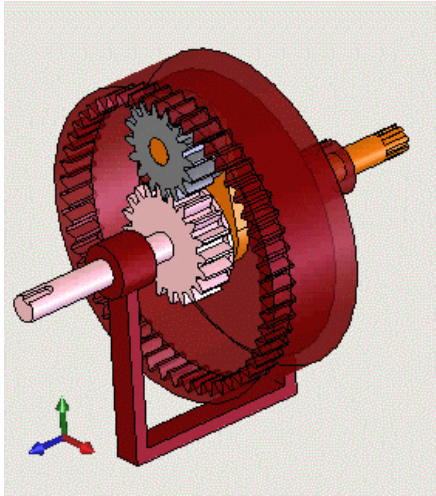


Liaisons et lois entrée sortie des systèmes

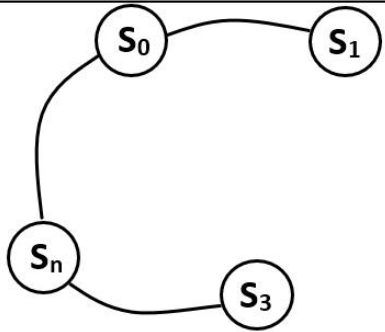
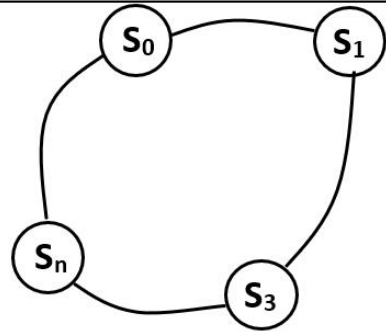
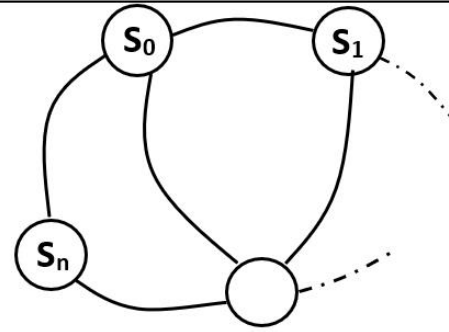
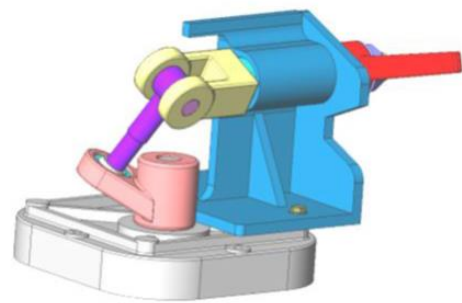


Liaisons et lois entrée sortie des systèmes

Compétences attendues :

- ✓ Proposer une démarche permettant d'obtenir une loi entrée-sortie géométrique. $\Leftrightarrow I$
- ✓ Simplifier un modèle de mécanisme.
- ✓ Déterminer les relations entre les grandeurs géométriques ou cinématiques. $\Leftrightarrow I$
- ✓ Résoudre numériquement une équation ou un système d'équations. $\Leftrightarrow I$

Chaîne ouverte, chaîne fermée

Chaîne ouverte	Chaîne fermée	Chaîne complexe
		
		
Une chaîne de solides ouverte est une chaîne où les solides extrêmes sont différents.	Une chaîne de solides fermée est une chaîne où les deux solides extrêmes sont reliés par une liaison. On a alors un cycle.	Une chaîne complexe est composée de plusieurs chaînes ouvertes et fermées imbriquées.

Chaîne ouverte, chaîne fermée

Définition : On appelle **loi d'entrée sortie** d'un système mécanique, l'ensemble des relations entre les paramètres de position de la pièce d'entrée (en général imposé par un actionneur) et ceux de la pièce de sortie.

RELATION DE CHASLES

Chaîne ouverte, chaîne fermée

Chaines cinématiques fermées :

- Fermeture géométrique ou fermeture angulaire
- Fermeture cinématique
- Produit scalaire de 2 vecteurs d'orientation relative constante
- Mise en équation à partir de la condition de non glissement...

Chaînes cinématiques ouvertes (type bras de manipulation)

Mécanisme $\rightarrow$ les paramètres cinématiques sont tous indépendants $\rightarrow$ pilotage de chaque paramètre cinématique

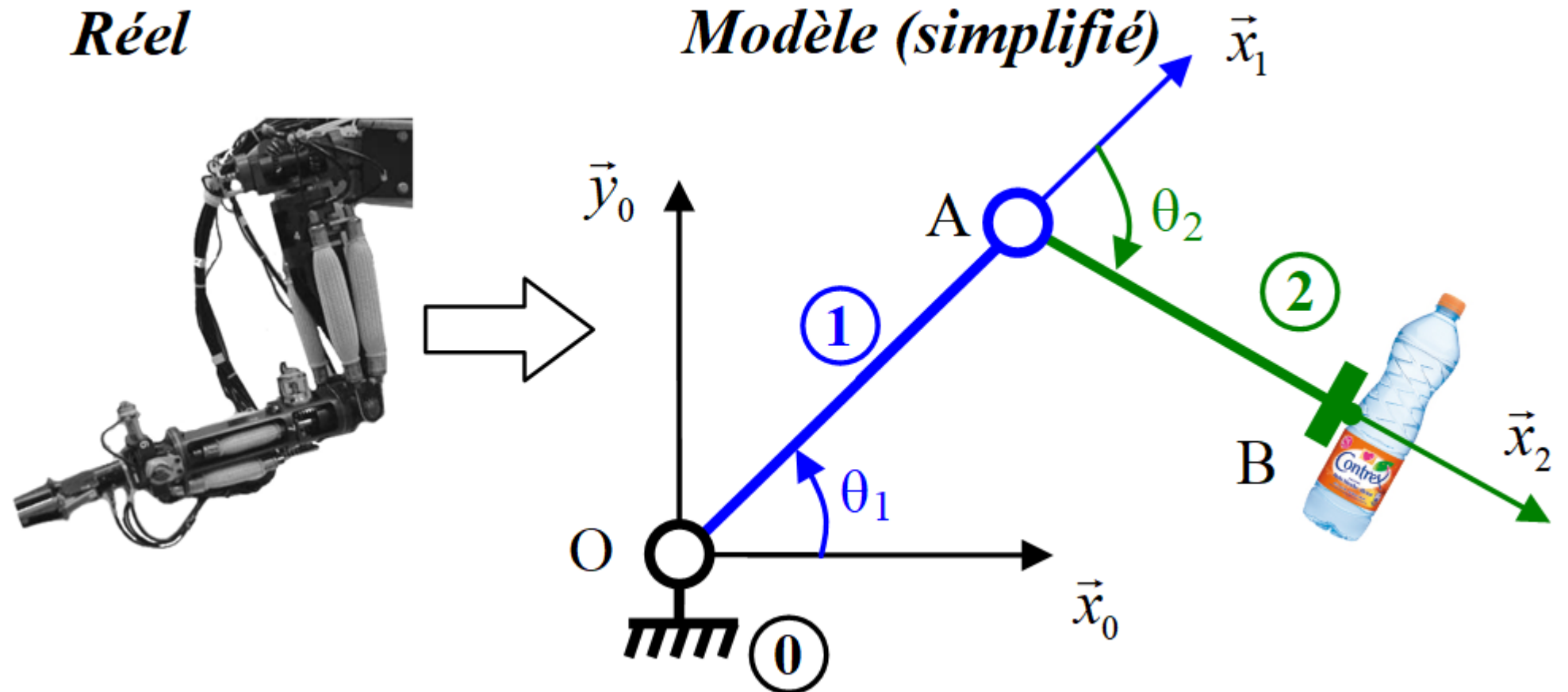
Mécanisme $\rightarrow$ composé $\rightarrow$ liaisons à un degré de liberté (pivots et/ou glissières)

Loi E/S $\rightarrow$ relation entre les coordonnées articulaires et les coordonnées opérationnelles

Loi E/S = **modèle géométrique**

Chaînes cinématiques ouvertes (type bras de manipulation)

Exemple du bras de robot :



Chaînes cinématiques ouvertes (type bras de manipulation)

Exemple du bras de robot :



Chaînes cinématiques ouvertes (type bras de manipulation)

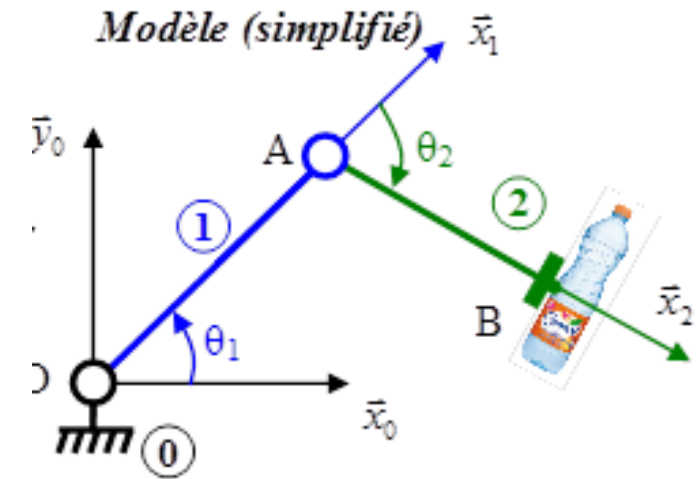
Exemple du bras de robot :

Robot $\rightarrow$ 2 mouvements de rotation de paramètres θ_1 et θ_2 .

B = pince en bout de chaîne : $(x_B ; y_B)$ dans $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.

Position angulaire de la pièce 2 par rapport à la pièce 0 :

$$(\vec{x}_0, \vec{x}_2) = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) + (\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \theta_1 + \theta_2$$



Chaînes cinématiques ouvertes (type bras de manipulation)

Calcul du modèle géométrique direct

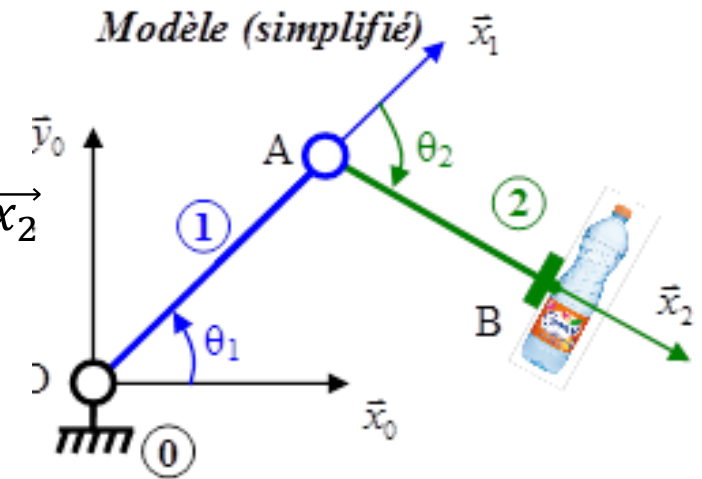
$$\overrightarrow{OB} \rightarrow \text{Relation de Chasles : } \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} \rightarrow x_B \cdot \overrightarrow{x_0} + y_B \cdot \overrightarrow{y_0} = L \cdot \overrightarrow{x_1} + L \cdot \overrightarrow{x_2}$$

Projection dans la base $\rightarrow$ exprimer x_B et y_B :

$$\rightarrow x_B \cdot \overrightarrow{x_0} + y_B \cdot \overrightarrow{y_0} = L \cdot \overrightarrow{x_1} + L \cdot \overrightarrow{x_2}$$

$$\text{avec } \overrightarrow{x_1} = \cos\theta_1 \cdot \overrightarrow{x_0} + \sin\theta_1 \cdot \overrightarrow{y_0} \text{ et } \overrightarrow{x_2} = \cos(\theta_1 + \theta_2) \cdot \overrightarrow{x_0} + \sin(\theta_1 + \theta_2) \cdot \overrightarrow{y_0}$$

$$\rightarrow x_B \cdot \overrightarrow{x_0} + y_B \cdot \overrightarrow{y_0} = (L \cdot \cos\theta_1 + L \cdot \cos(\theta_1 + \theta_2)) \cdot \overrightarrow{x_0} + (L \cdot \sin\theta_1 + L \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2)) \cdot \overrightarrow{y_0}$$

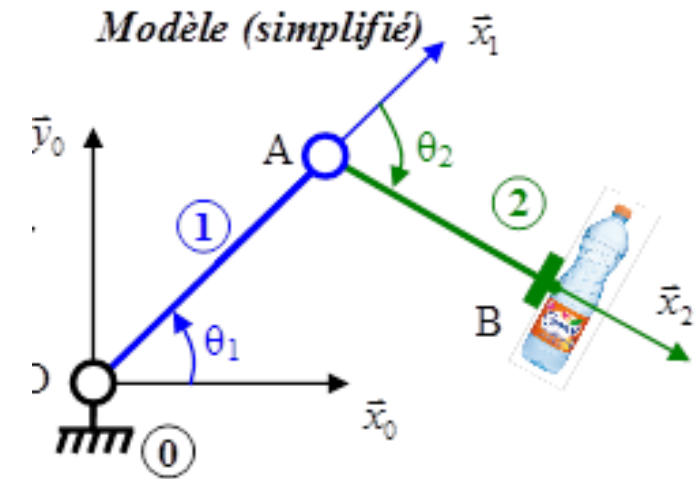


Chaînes cinématiques ouvertes (type bras de manipulation)

Calcul du modèle géométrique direct

Modèle géométrique direct :

$$\begin{cases} x_B = L \cdot \cos\theta_1 + L \cdot \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ y_B = L \cdot \sin\theta_1 + L \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{cases}$$



Chaînes cinématiques ouvertes (type bras de manipulation)

Calcul du modèle géométrique indirect

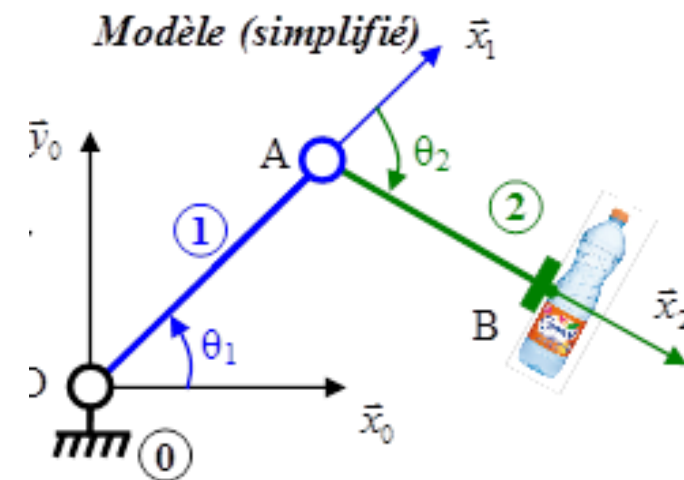
→ Inverser le modèle géométrique direct :

$$\begin{cases} x_B = L \cdot \cos \theta_1 + L \cdot \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ y_B = L \cdot \sin \theta_1 + L \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{cases}$$

→ Transformations trigonométriques de sommes en produits

$$(\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2} \text{ et } \sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2})$$

$$\begin{cases} x_B = L \cdot \cos \theta_1 + L \cdot \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ y_B = L \cdot \sin \theta_1 + L \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_B = 2 \cdot L \cdot \cos \frac{2 \cdot \theta_1 + \theta_2}{2} \cdot \cos \frac{\theta_2}{2} \\ y_B = 2 \cdot L \cdot \sin \frac{2 \cdot \theta_1 + \theta_2}{2} \cdot \cos \frac{\theta_2}{2} \end{cases}$$



Chaînes cinématiques ouvertes (type bras de manipulation)

Calcul du modèle géométrique indirect

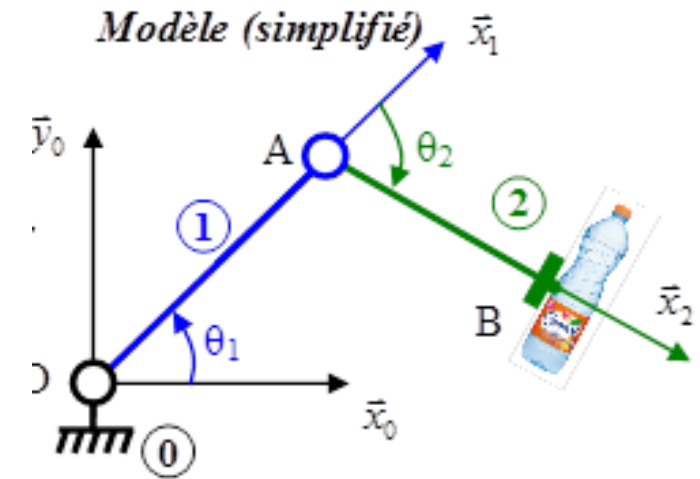
→ $x_B^2 + y_B^2$ (→ Faire apparaître $\cos^2 A + \sin^2 A$) :

$$x_B^2 + y_B^2 = 4.L^2.\cos^2\frac{\theta_2}{2}.\left(\cos^2\frac{2.\theta_1 + \theta_2}{2} + \sin^2\frac{2.\theta_1 + \theta_2}{2}\right) = 4.L^2.\cos^2\frac{\theta_2}{2}$$

et avec $\cos^2\frac{\theta_2}{2} = \frac{1+\cos\theta_2}{2}$

$$x_B^2 + y_B^2 = 2.L^2.(\cos\theta_2 + 1)$$

→ ce qui permet d'obtenir : $\cos\theta_2 = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{x_B}{L}\right)^2 + \left(\frac{y_B}{L}\right)^2\right) - 1$



Chaînes cinématiques ouvertes (type bras de manipulation)

Calcul du modèle géométrique indirect

$$\rightarrow \frac{y_B}{x_B} = \tan \frac{2.\theta_1 + \theta_2}{2}$$

$$\rightarrow \theta_1 = \arctan\left(\frac{y_B}{x_B}\right) - \frac{\theta_2}{2}$$

Modèle géométrique indirect :

$$\begin{cases} \theta_2 = \arccos\left[\frac{1}{2}\left(\left(\frac{x_B}{L}\right)^2 + \left(\frac{y_B}{L}\right)^2\right) - 1\right] \\ \theta_1 = \arctan\left(\frac{y_B}{x_B}\right) - \frac{\theta_2}{2} \end{cases}$$

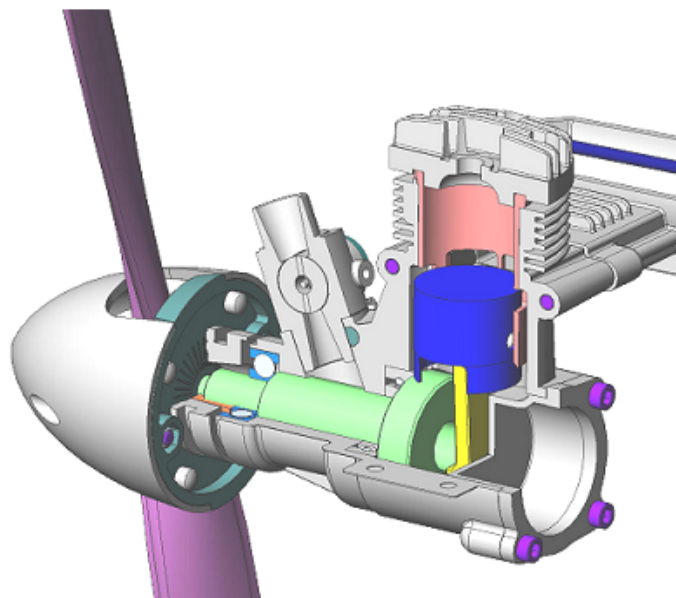
Chaînes cinématiques fermées

Calcul d'une loi d'entrée sortie par fermeture géométrique

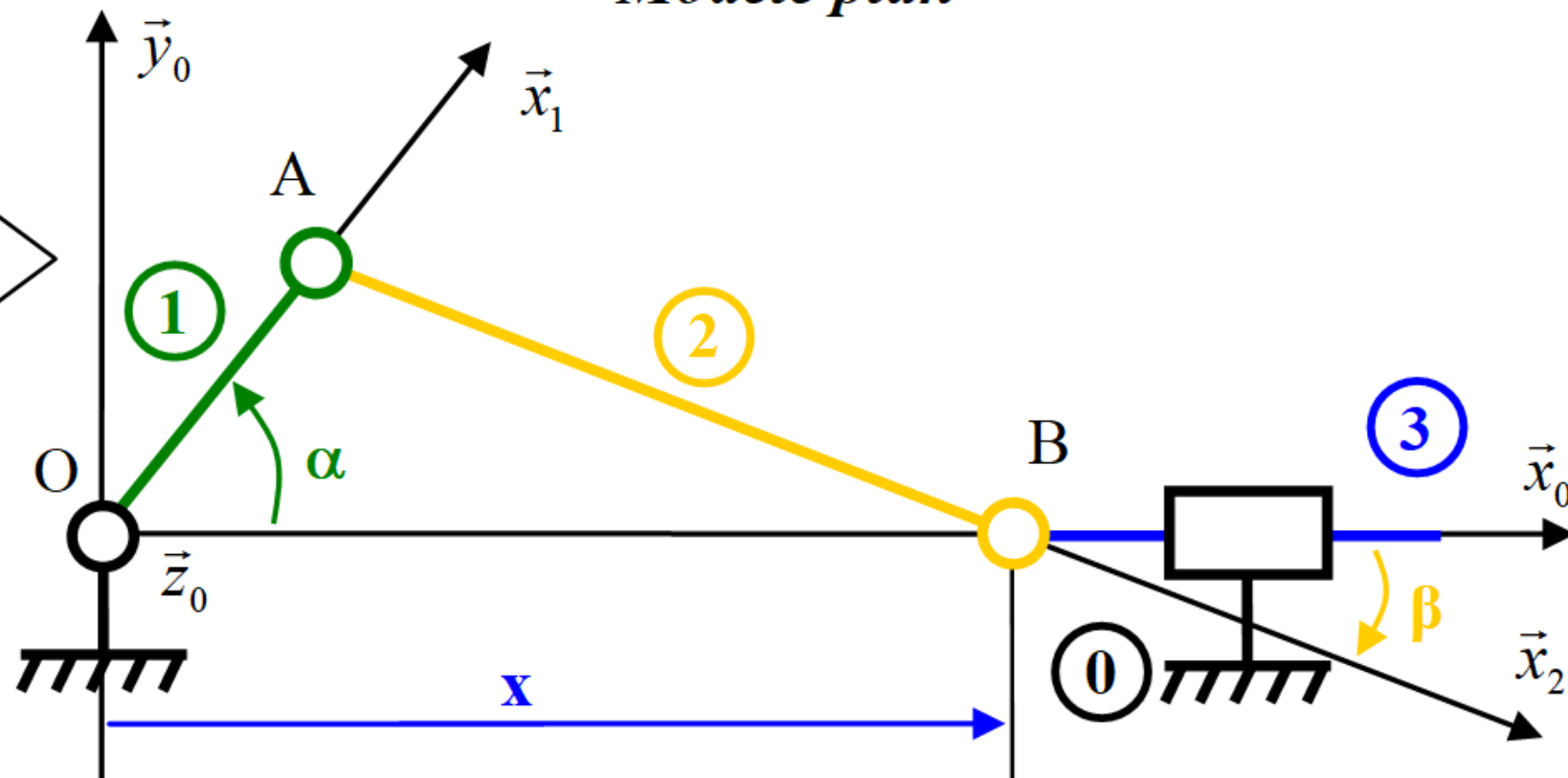
La loi entrée sortie dans le cas de chaînes fermées se fait souvent (mais pas toujours) à l'aide de la technique dite de fermeture géométrique.

Chaînes cinématiques fermées

Réel

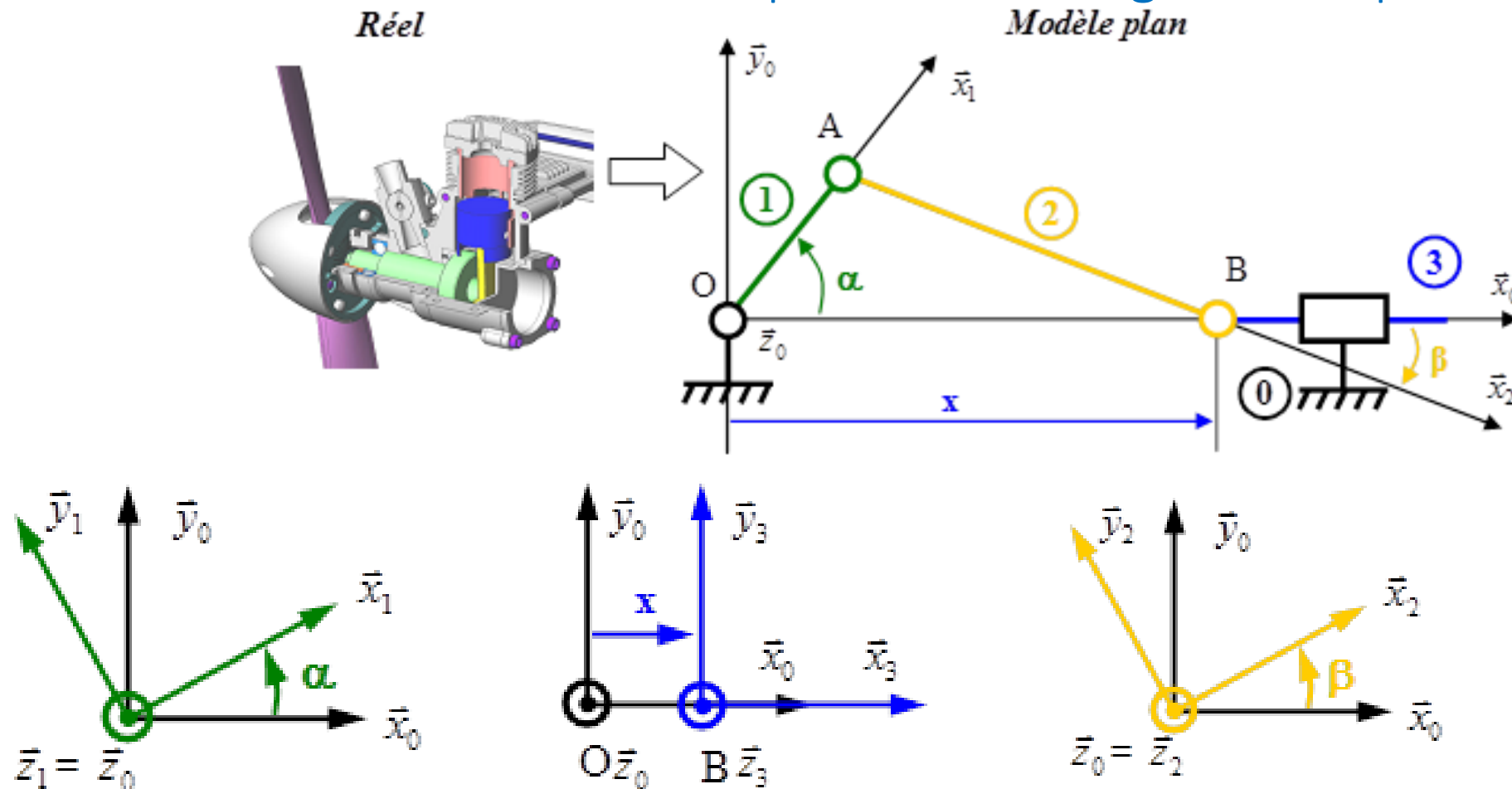


Modèle plan



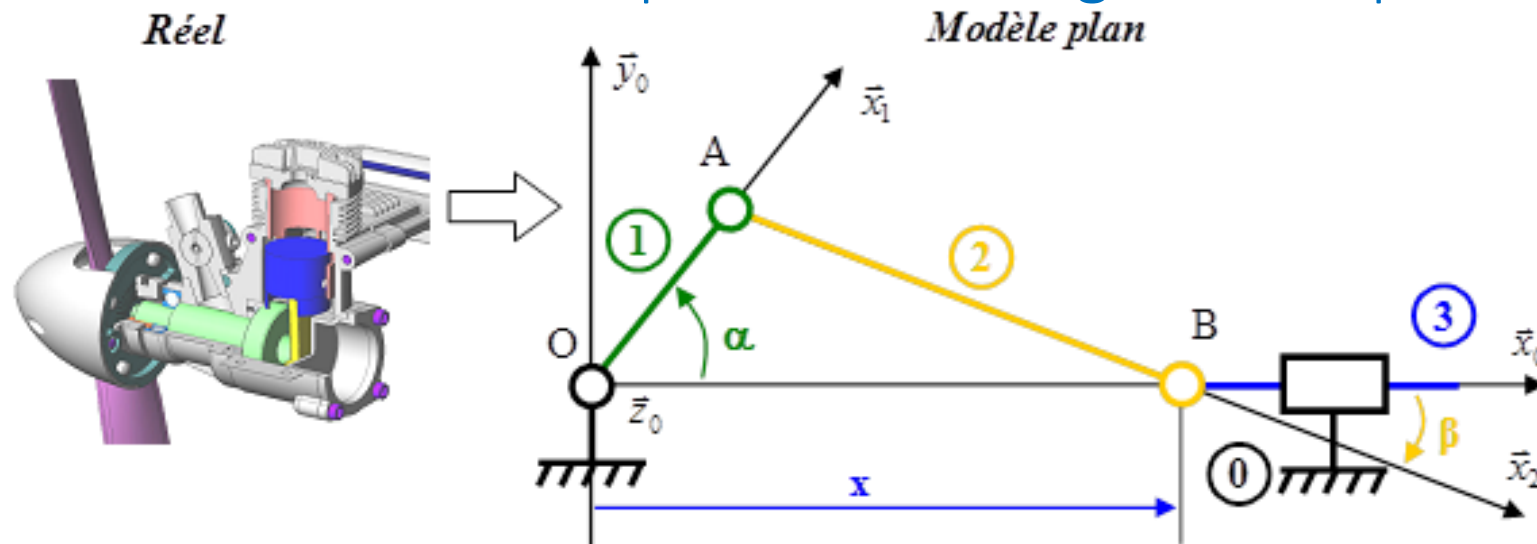
Chaînes cinématiques fermées

Calcul d'une loi d'entrée sortie par fermeture géométrique



Chaînes cinématiques fermées

Calcul d'une loi d'entrée sortie par fermeture géométrique



Fermeture géométrique : $\overrightarrow{OO}$ est nul : $\overrightarrow{OO} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO} = \vec{0}$

Soit $L_1 \cdot \vec{x}_1 + L_2 \cdot \vec{x}_2 - x \cdot \vec{x}_0 = \vec{0}$

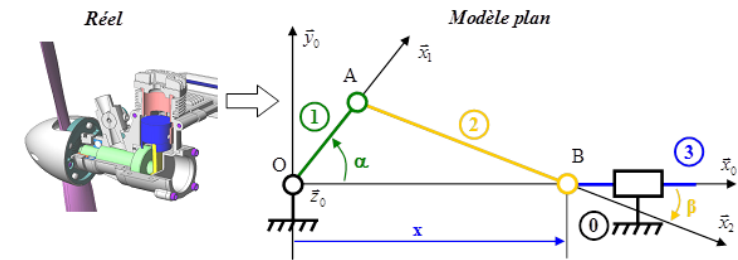
Projection sur les axes $\vec{x}_0$ et $\vec{y}_0$:

$$\begin{cases} L_1 \cdot \cos\alpha + L_2 \cdot \cos\beta - x = 0 \\ L_1 \cdot \sin\alpha + L_2 \cdot \sin\beta = 0 \end{cases}$$

Chaînes cinématiques fermées

Calcul d'une loi d'entrée sortie par fermeture géométrique

- Combiner en une seule relation
- Faire disparaître le paramètre intermédiaire β .

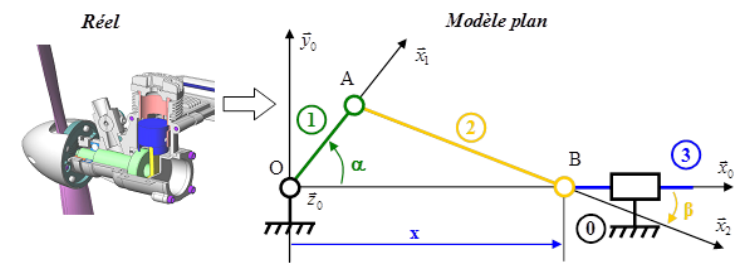


$$\rightarrow \begin{cases} \cos\beta = \frac{x - L_1 \cdot \cos\alpha}{L_2} \\ \sin\beta = \frac{-L_1 \cdot \sin\alpha}{L_2} \end{cases} \quad \text{et } \cos^2\beta + \sin^2\beta = 1$$

$$\rightarrow \left(\frac{x - L_1 \cdot \cos\alpha}{L_2} \right)^2 + \left(\frac{-L_1 \cdot \sin\alpha}{L_2} \right)^2 = 1 \rightarrow (x - L_1 \cdot \cos\alpha)^2 = L_2^2 - (L_1 \cdot \sin\alpha)^2$$

Chaînes cinématiques fermées

Calcul d'une loi d'entrée sortie par fermeture géométrique



Soit la loi d'entrée sortie :

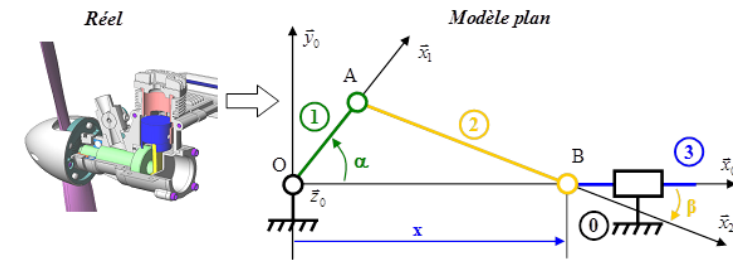
$$x = L_1 \cdot \cos \alpha + \sqrt{L_2^2 - (L_1 \cdot \sin \alpha)^2}$$

Cette relation n'est valable que pour $L_2 > L_1$.

Chaînes cinématiques fermées

Calcul d'une loi d'entrée sortie par fermeture géométrique

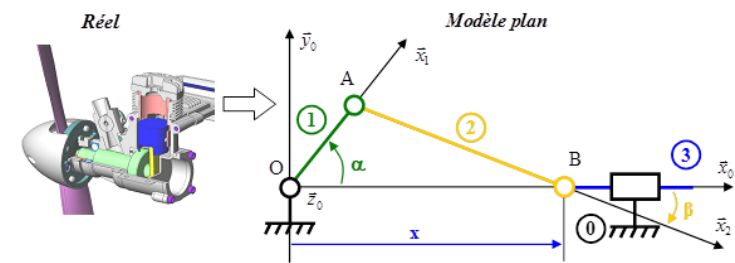
Techniques de calcul utiles :



- Equations projetées + isolement cosinus et sinus des angles qui ne nous intéressent pas + élévation au carré + $\cos^2 \beta + \sin^2 \beta = 1$
- Relation entre les angles $\rightarrow$ rapport des équations ($\rightarrow$ tangente)

Chaînes cinématiques fermées

Calcul d'une loi d'entrée sortie par fermeture géométrique



Soit la loi d'entrée sortie :

$$x = L_1 \cdot \cos \alpha + \sqrt{L_2^2 - (L_1 \cdot \sin \alpha)^2}$$

Cette relation n'est valable que pour $L_2 > L_1$.

Chaînes cinématiques ouvertes (type bras de manipulation)

Tracé de la loi entrée-sortie

Tracer numériquement l'évolution de x en fonction de l'angle α .

→ équation du type $f(x) = 0$ pour un angle α fixé

→ Obtenir les x solutions (pour chaque α fixé)

→ Tracer la courbe donnant x en fonction de α

Pour α fixé :

$$L_1 \cdot \cos \alpha + \sqrt{L_2^2 - (L_1 \cdot \sin \alpha)^2} - x = 0$$

Cette équation est bien de la forme $f(x) = 0$.

Chaînes cinématiques ouvertes (type bras de manipulation)

Tracé de la loi entrée-sortie

Equation de la forme $f(x) = 0$

- f est continue sur $[a, b]$
- $f(a) \cdot f(b) \leq 0$.

→ **DICHOTOMIE**

→ **METHODE DE NEWTON**

Chaînes cinématiques ouvertes (type bras de manipulation)

Tracé de la loi entrée-sortie

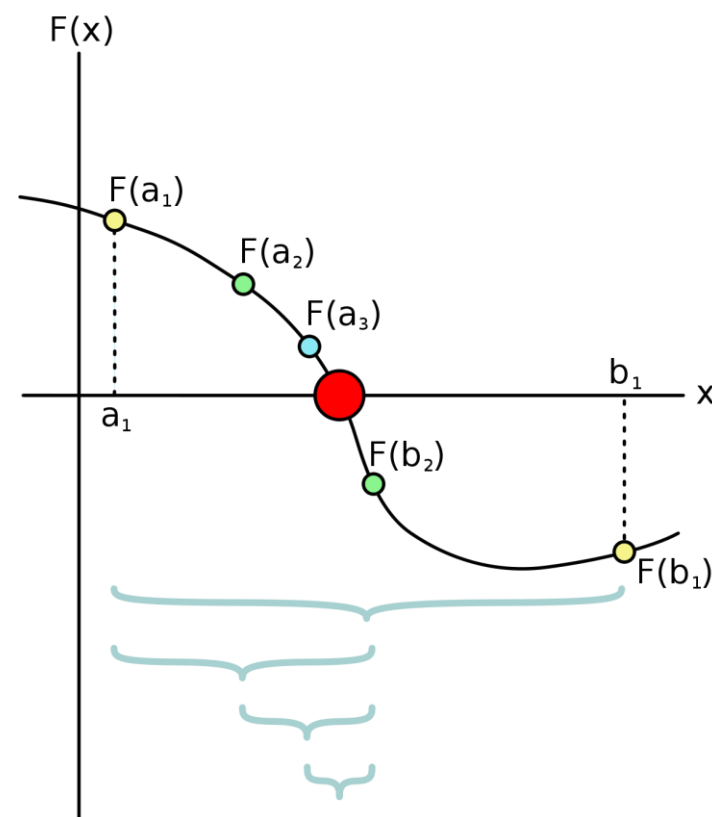
Dichotomie

$$a_0 = a \text{ et } b_0 = b$$

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, c_n = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

Si $f(c_n)$ a même signe que $f(a_n) \rightarrow b_{n+1} = c_n$ et $a_{n+1} = a_n$

Sinon $\rightarrow a_{n+1} = c_n$ et $b_{n+1} = b_n$

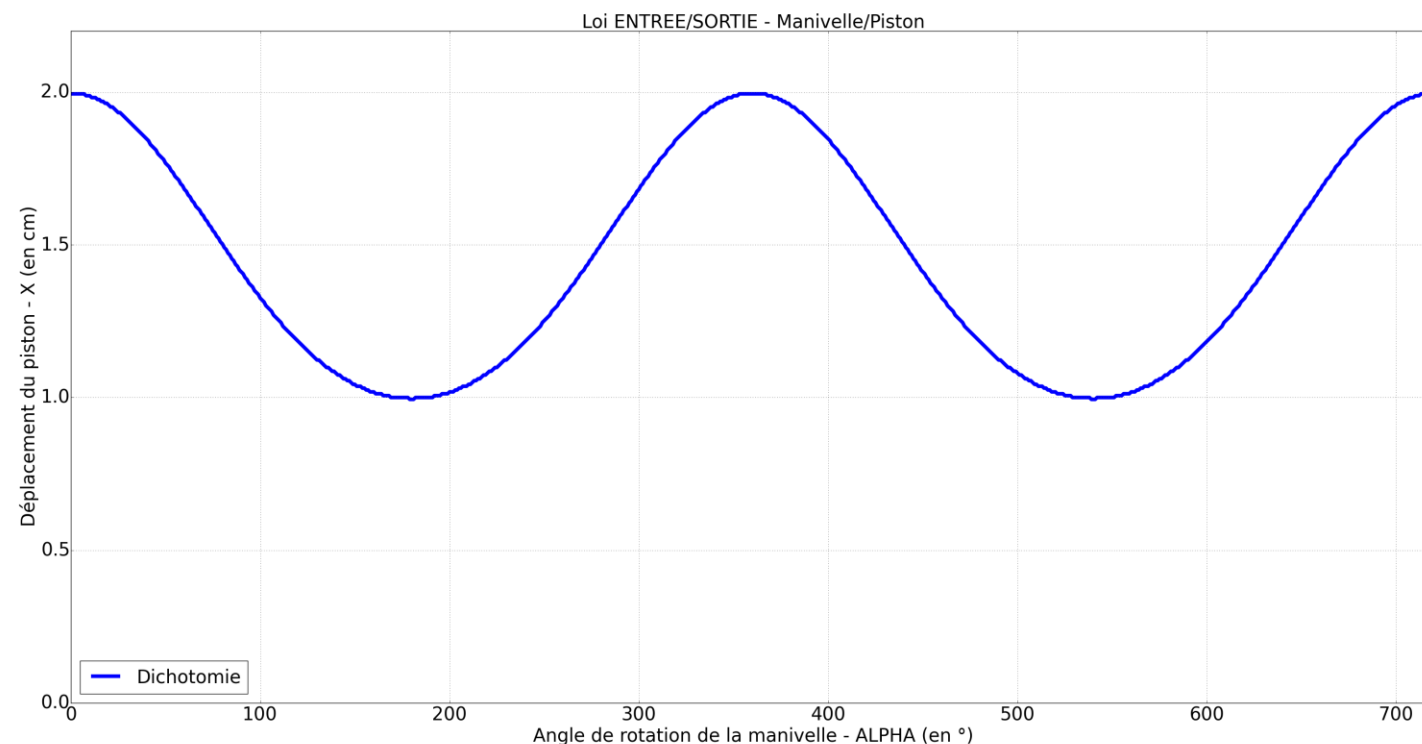


Chaînes cinématiques ouvertes (type bras de manipulation)

Tracé de la loi entrée-sortie

Dichotomie

```
def Dichotomie(f,a,b,epsilon):  
    A = a  
    B = b  
    while abs(B-A)>epsilon:  
        c = (B+A)/2  
        if f(A)*f(c)>0:  
            A = c  
        else:  
            B = c  
    return A
```



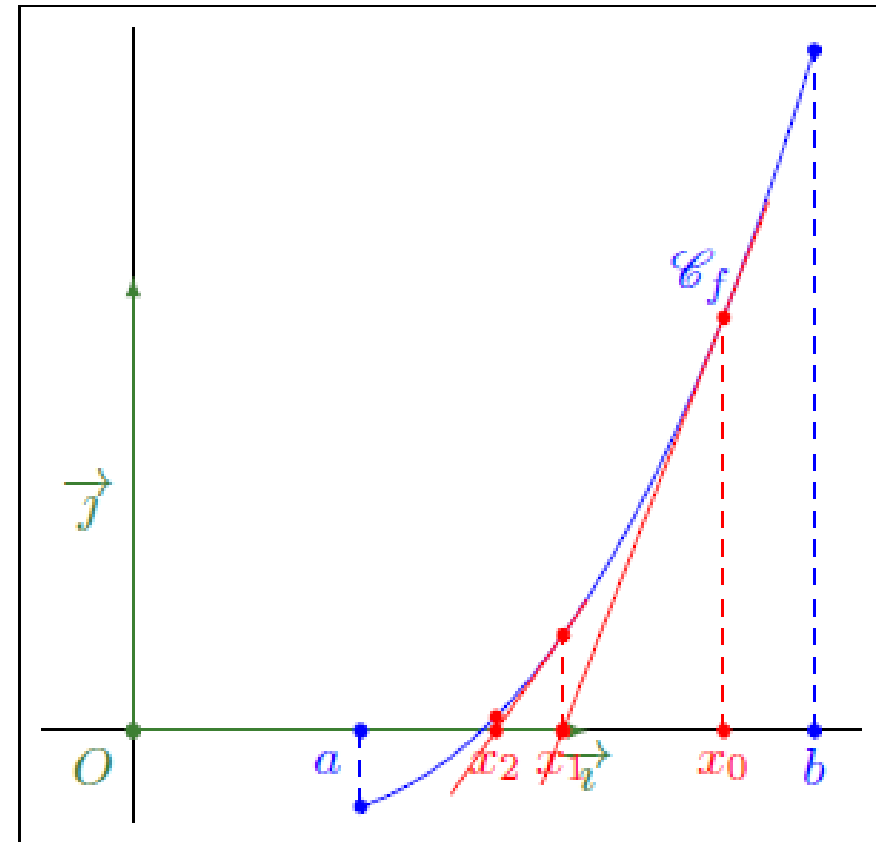
Chaînes cinématiques ouvertes (type bras de manipulation)

Tracé de la loi entrée-sortie

Méthode de Newton

Partant d'une valeur initiale x_0 , on suit la tangente à f en x_0 jusqu'à rencontrer l'axes des abscisses, ce qui nous donne une valeur x_1 .

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

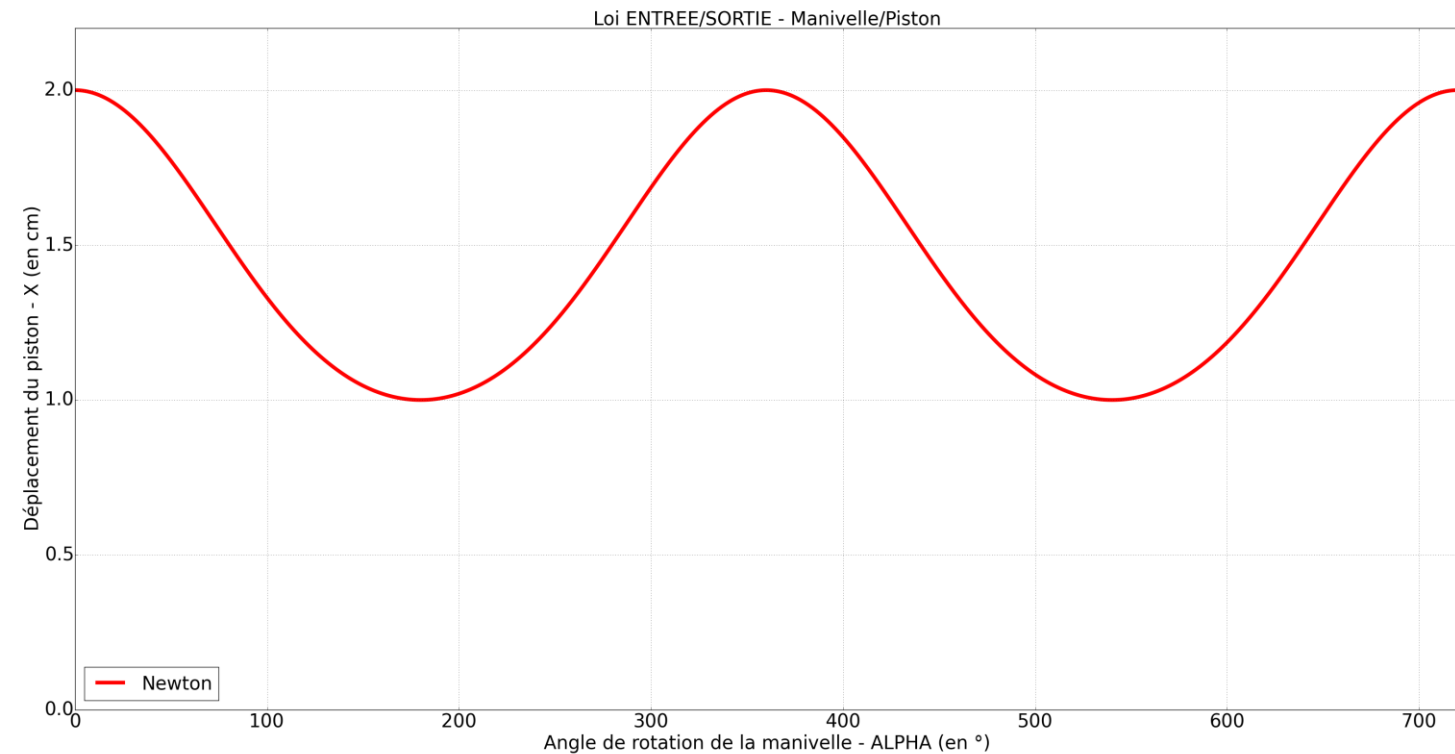


Chaînes cinématiques ouvertes (type bras de manipulation)

Tracé de la loi entrée-sortie

Méthode de Newton

```
def Newton(f, fprime, x0, epsilon):  
    x = x0  
    while f(x-epsilon)*f(x+epsilon) > 0:  
        x = x-f(x)/fprime(x)  
    return x
```



Chaînes cinématiques ouvertes (type bras de manipulation)

Tracé de la loi entrée-sortie

Comparaison des deux méthodes numériques

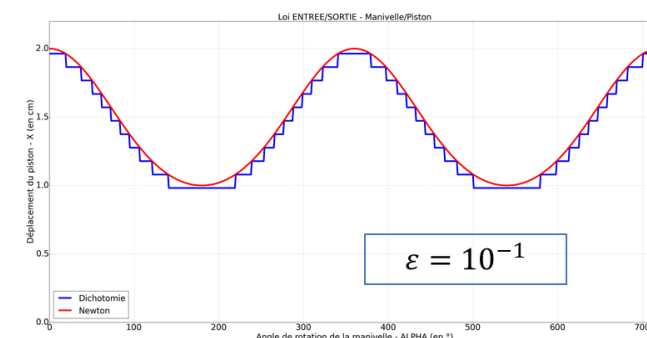
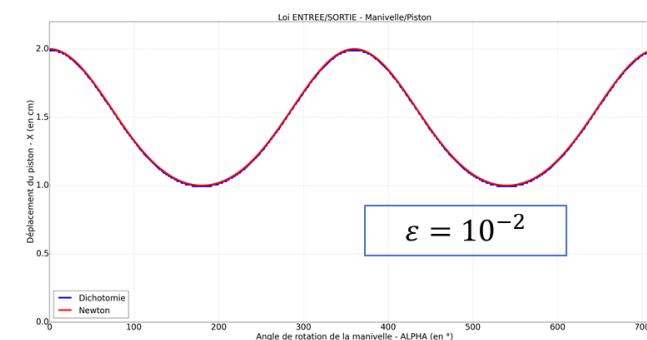
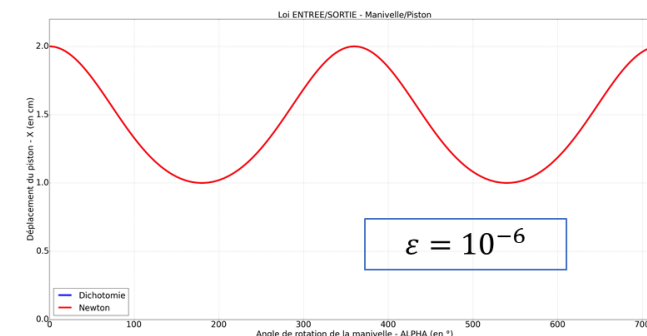
Méthodes → itératives

Newton → connaître l'expression de la dérivée de la fonction f .

Dichotomie → robustesse (converge → hypothèses f continue et $f(a).f(b) \leq 0$).

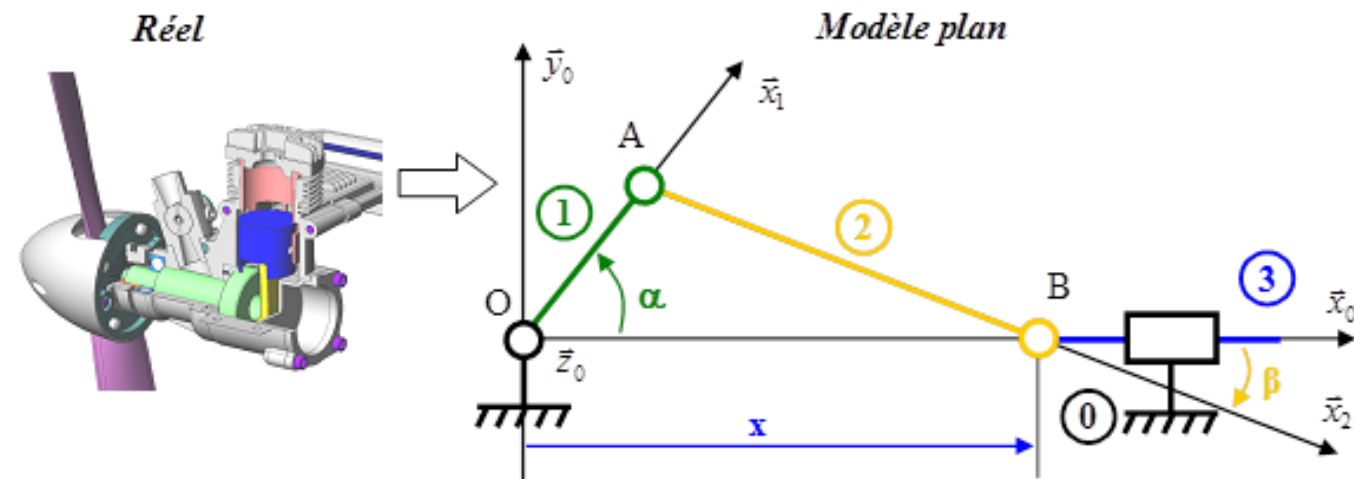
Remarque :

- Dichotomie → `scipy.optimize.bisect`
- Newton → `scipy.optimize.newton`.



Chaînes cinématiques fermées

Calcul d'une loi d'entrée sortie par fermeture cinématique



Fermeture cinématique par composition des mouvements.

On obtient alors deux équations vectorielles (composition des vecteurs vitesses de rotation et des vecteurs vitesses instantanées).

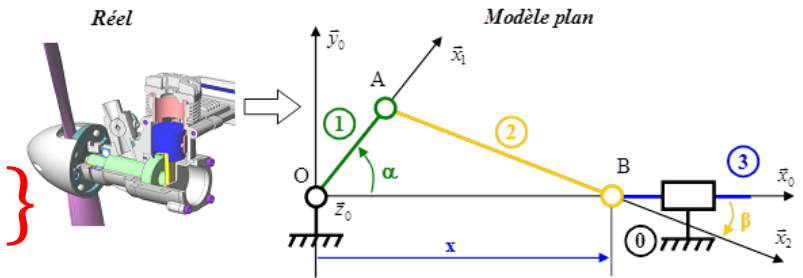
Equations obtenues par fermeture de chaîne cinématique = dérivées des équations obtenues par fermeture géométrique $\rightarrow$ 2 approches équivalentes

Chaînes cinématiques fermées

Calcul d'une loi d'entrée sortie par fermeture cinématique

Fermeture cinématique :

$$\{V_{0/3}\} + \{V_{3/2}\} + \{V_{2/1}\} + \{V_{1/0}\} = \{0\}$$



Soit :

$$\begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{0/3}} \\ \overrightarrow{V_{A \in 0/3}} \end{Bmatrix}_A + \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{3/2}} \\ \overrightarrow{V_{A \in 3/2}} \end{Bmatrix}_A + \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{2/1}} \\ \overrightarrow{V_{A \in 2/1}} \end{Bmatrix}_A + \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \\ \overrightarrow{V_{A \in 1/0}} \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A$$

$$\rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{\Omega_{0/3}} + \overrightarrow{\Omega_{3/2}} + \overrightarrow{\Omega_{2/1}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} = \vec{0} \\ \overrightarrow{V_{A \in 0/3}} + \overrightarrow{V_{A \in 3/2}} + \overrightarrow{V_{A \in 2/1}} + \overrightarrow{V_{A \in 1/0}} = \vec{0} \end{cases}$$

Chaînes cinématiques fermées

Calcul d'une loi d'entrée sortie par fermeture cinématique

$$\rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{\Omega_{0/3}} + \overrightarrow{\Omega_{3/2}} + \overrightarrow{\Omega_{2/1}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} = \vec{0} \\ \overrightarrow{V_{A \in 0/3}} + \overrightarrow{V_{A \in 3/2}} + \overrightarrow{V_{A \in 2/1}} + \overrightarrow{V_{A \in 1/0}} = \vec{0} \end{cases}$$

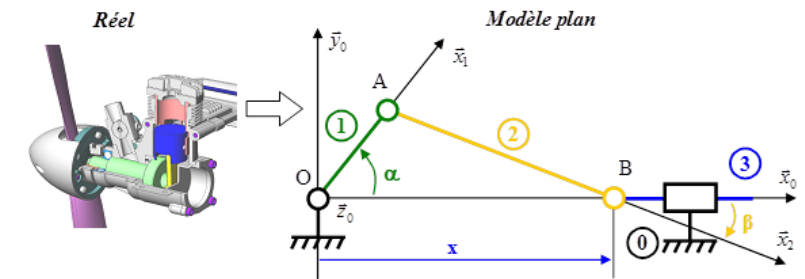
Avec :

$$\overrightarrow{V_{A \in 0/3}} = -\overrightarrow{V_{B \in 3/0}} = -\dot{x} \cdot \vec{x}_0$$

$$\overrightarrow{V_{A \in 3/2}} = \overrightarrow{V_{B \in 3/2}} + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{\Omega_{3/2}} = L_2 \cdot \vec{x}_2 \wedge -\dot{\beta} \cdot \vec{z}_0 = L_2 \cdot \dot{\beta} \cdot \vec{y}_2$$

$$\overrightarrow{V_{A \in 2/1}} = \vec{0}$$

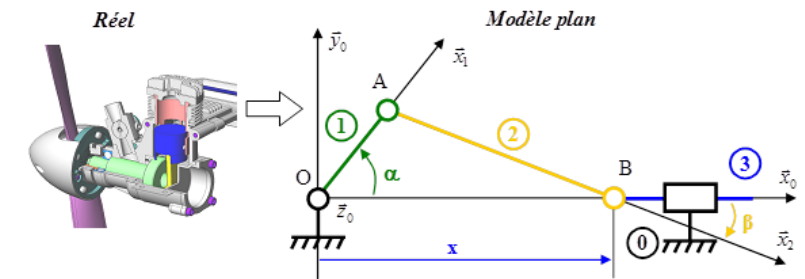
$$\overrightarrow{V_{A \in 1/0}} = L_1 \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{y}_1$$



Chaînes cinématiques fermées

Calcul d'une loi d'entrée sortie par fermeture cinématique

$$\text{Soit : } -\dot{x} \cdot \vec{x}_0 + L_2 \cdot \dot{\beta} \cdot \vec{y}_2 + L_1 \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{y}_1 = \vec{0}$$



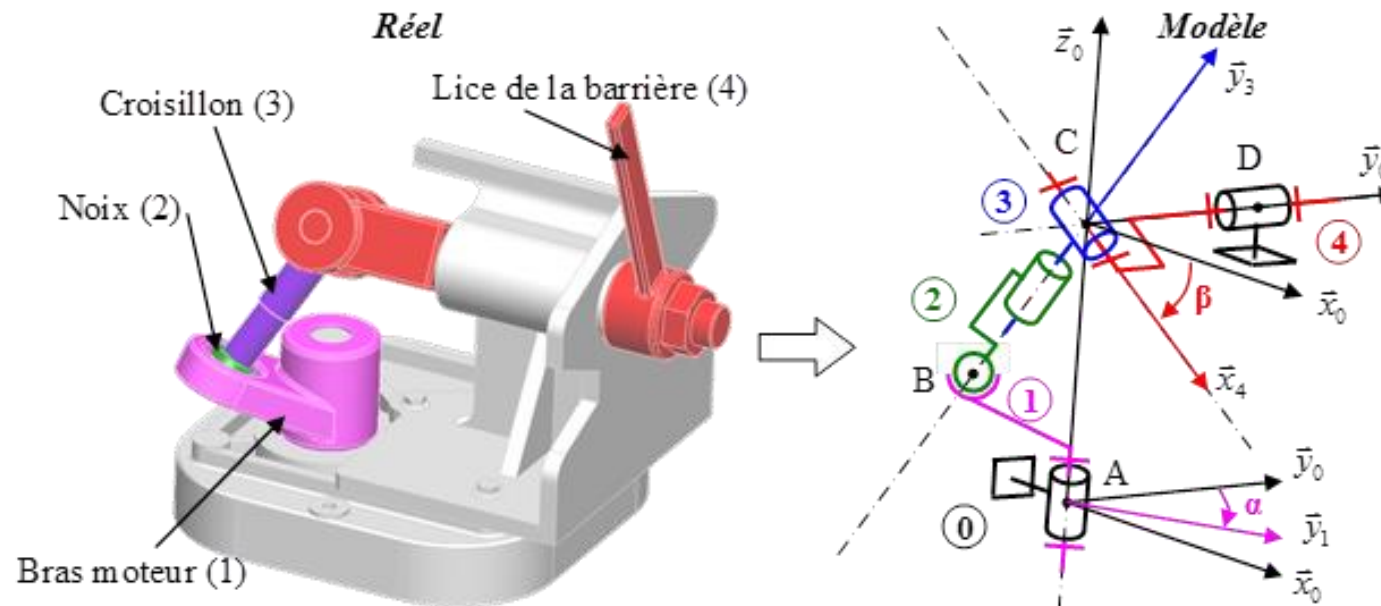
$$\begin{cases} -L_1 \cdot \dot{\alpha} \cdot \sin \alpha - L_2 \cdot \dot{\beta} \cdot \sin \beta - \dot{x} = 0 \\ L_1 \cdot \dot{\alpha} \cdot \cos \alpha + L_2 \cdot \dot{\beta} \cdot \cos \beta = 0 \end{cases}$$

→ 2 équations scalaires = dérivée des 2 équations scalaires de la fermeture géométrique

Chaînes cinématiques fermées

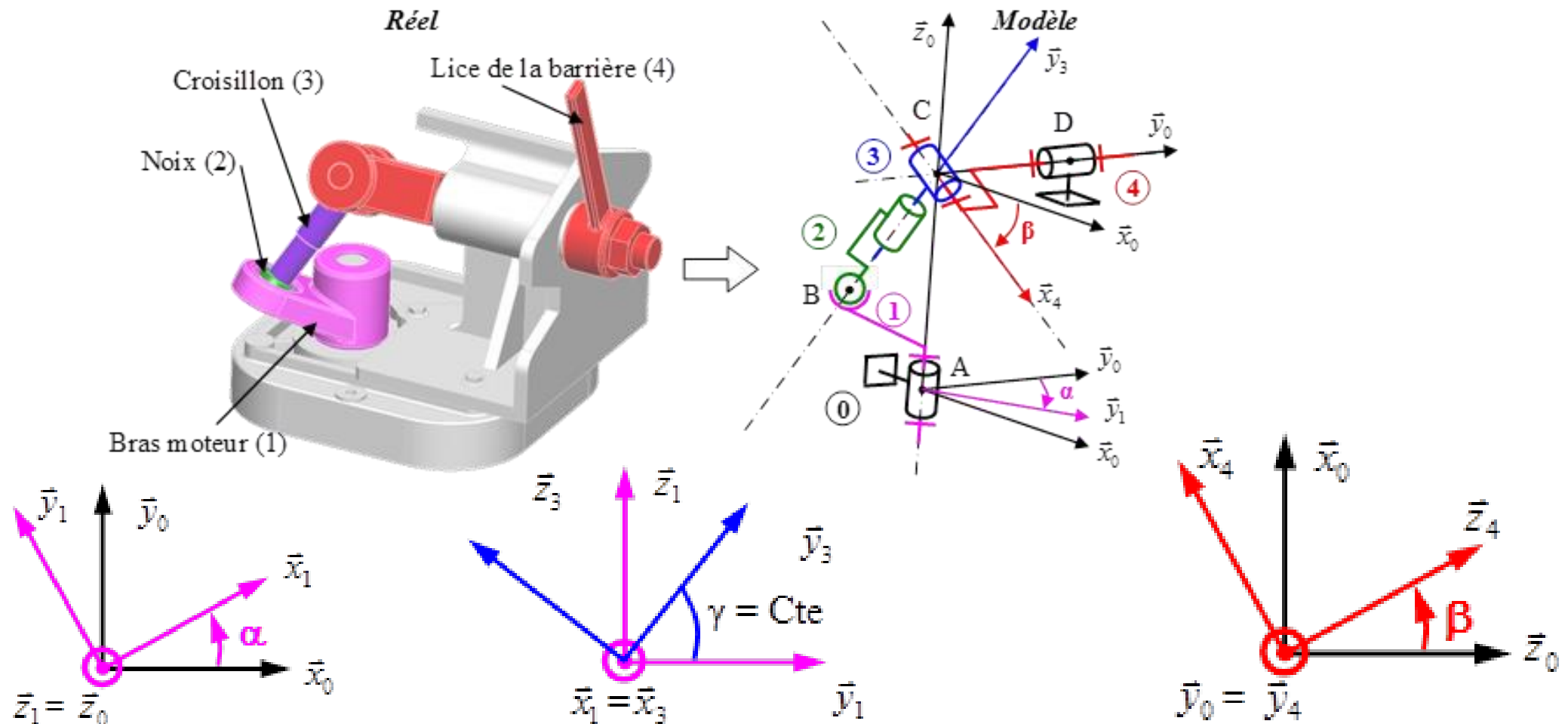
Calcul d'une loi d'entrée sortie par produit scalaire de 2 vecteurs d'orientation relative constante

La loi entrée sortie dans le cas de chaînes fermées $\rightarrow$ particularité angulaire du système (conservation d'une valeur angulaire lors du mouvement par exemple).



Chaînes cinématiques fermées

Calcul d'une loi d'entrée sortie par produit scalaire de 2 vecteurs d'orientation relative constante



Chaînes cinématiques fermées

Calcul d'une loi d'entrée sortie par produit scalaire de 2 vecteurs d'orientation relative constante

Particularité angulaire = $\overrightarrow{BC}$ est toujours orthogonal à $\overrightarrow{x_4}$.

$$\rightarrow \overrightarrow{y_3} \cdot \overrightarrow{x_4} = 0$$

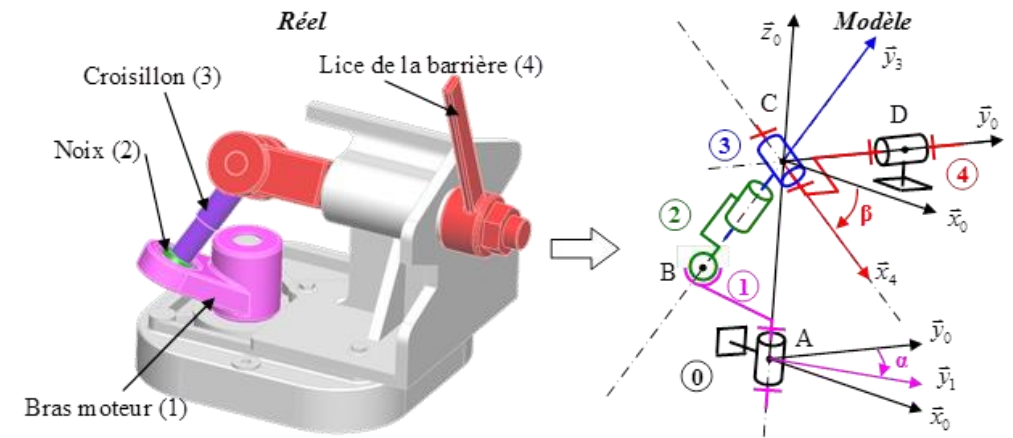
$$\overrightarrow{y_3} = \cos\gamma \cdot \overrightarrow{y_1} + \sin\gamma \cdot \overrightarrow{z_1} \text{ et } \overrightarrow{x_4} = -\sin\beta \cdot \overrightarrow{z_0} + \cos\beta \cdot \overrightarrow{x_0}$$

$$\text{Soit : } (\cos\gamma \cdot \overrightarrow{y_1} + \sin\gamma \cdot \overrightarrow{z_1}) \cdot (-\sin\beta \cdot \overrightarrow{z_0} + \cos\beta \cdot \overrightarrow{x_0}) = 0$$

$$-\cos\gamma \cdot \sin\beta \cdot \overrightarrow{z_0} \cdot \overrightarrow{y_1} - \sin\gamma \cdot \sin\beta \cdot \overrightarrow{z_0} \cdot \overrightarrow{z_1} + \cos\gamma \cdot \cos\beta \cdot \overrightarrow{x_0} \cdot \overrightarrow{y_1} + \sin\gamma \cdot \cos\beta \cdot \overrightarrow{x_0} \cdot \overrightarrow{z_1} = 0$$

$$-\sin\gamma \cdot \sin\beta - \cos\gamma \cdot \cos\beta \cdot \sin\alpha = 0$$

$$-\sin\alpha = \frac{\sin\gamma}{\cos\gamma} \cdot \frac{\sin\beta}{\cos\beta}$$



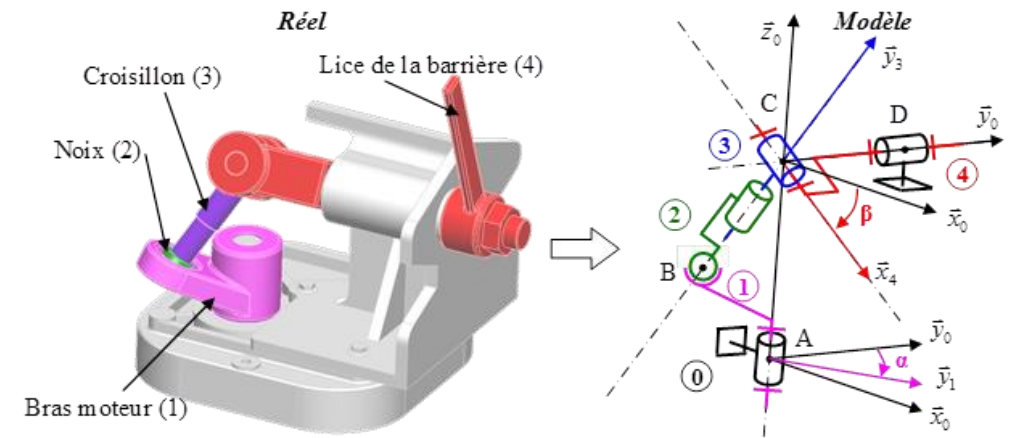
Chaînes cinématiques fermées

Calcul d'une loi d'entrée sortie par produit scalaire de 2 vecteurs d'orientation relative constante

Loi d'entrée sortie :

$$-\sin \alpha = \tan \gamma \cdot \tan \beta$$

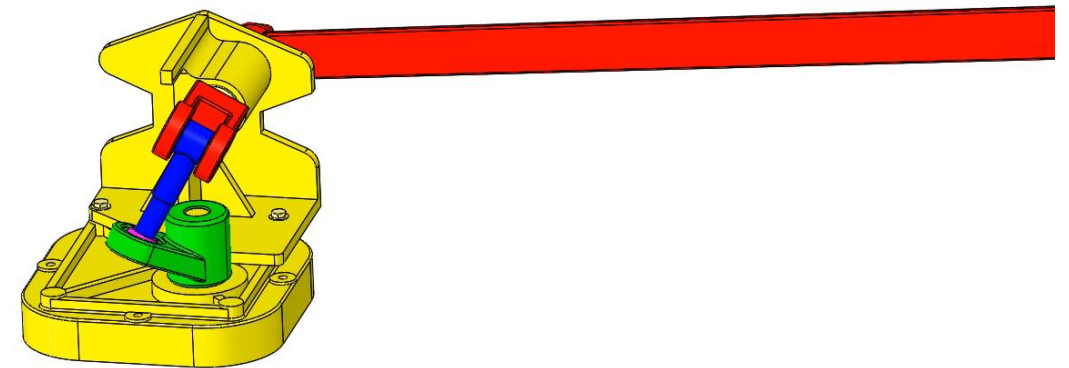
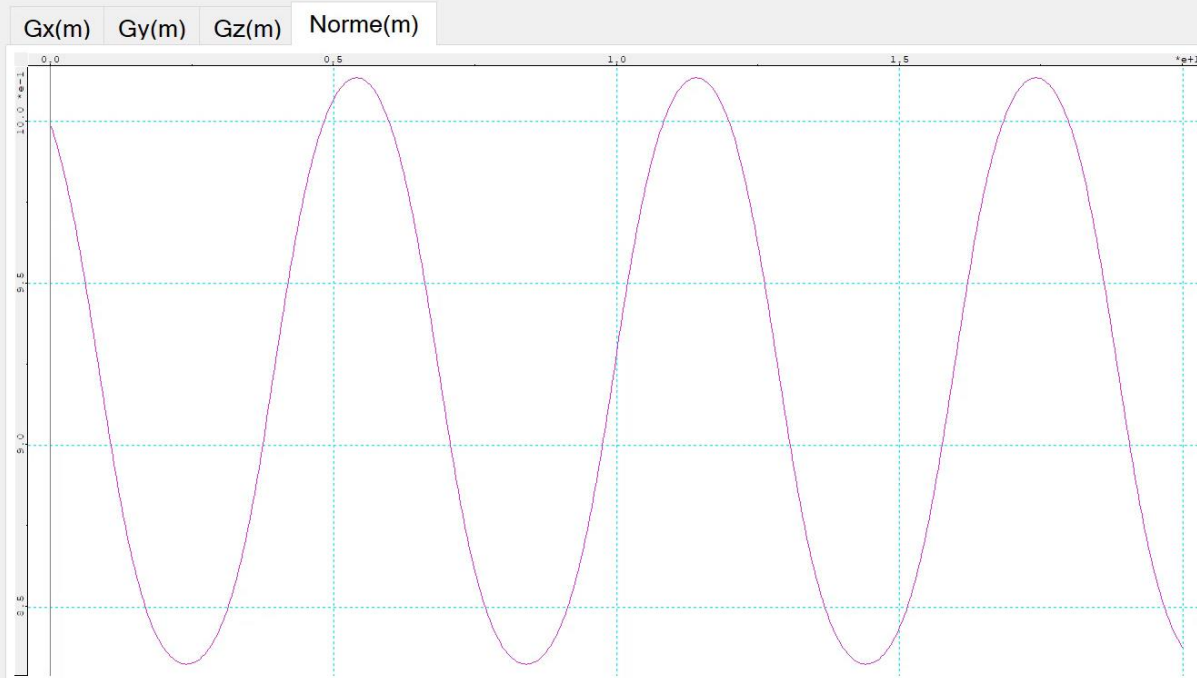
→ Pour $\gamma = \pi/4$ l'amplitude de la lice = $\pi/2$



Chaînes cinématiques fermées

Calcul d'une loi d'entrée sortie par produit scalaire de 2 vecteurs d'orientation relative constante

Position du centre d'inertie de Barriere<1> par rapport à repère général



Chaînes cinématiques fermées

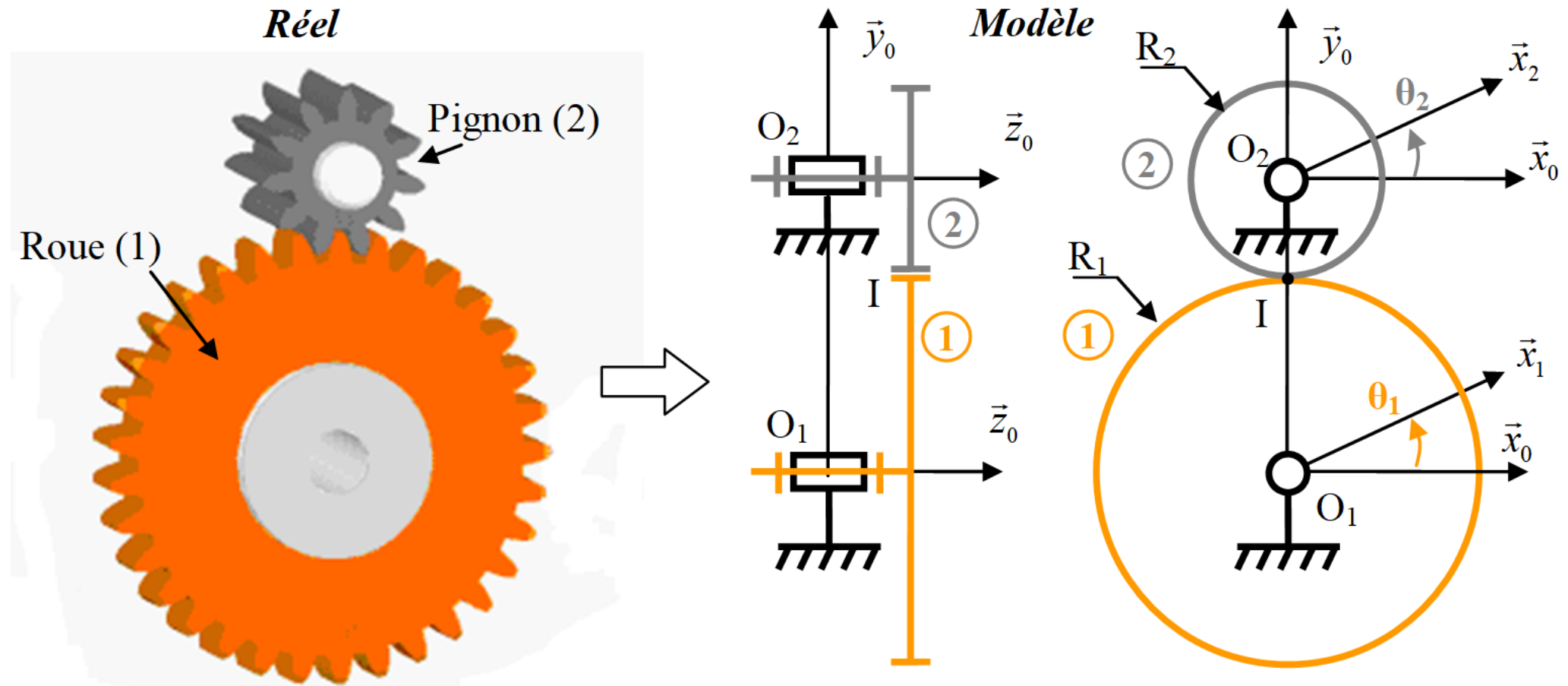
Calcul d'une loi d'entrée sortie à partir d'une condition de non glissement

La loi entrée sortie dans le cas de chaînes fermées

→ Condition de non glissement au point de contact entre deux pièces du mécanisme.

Chaînes cinématiques fermées

Calcul d'une loi d'entrée sortie à partir d'une condition de non glissement



La condition de non glissement au point de contact s'écrit $\overrightarrow{V_{I \in 2/1}} = \vec{0}$.

Chaînes cinématiques fermées

Calcul d'une loi d'entrée sortie à partir d'une condition de non glissement

$$\begin{aligned} \overrightarrow{V_{I \in 2/1}} &= \vec{0} \\ \overrightarrow{V_{I \in 2/1}} &= \overrightarrow{V_{I \in 2/0}} - \overrightarrow{V_{I \in 1/0}} = \vec{0} \end{aligned}$$

Nature du mouvement de 2/0 ? :
Rotation autour de l'axe $(O_2, \vec{z}_0)$

$$\begin{aligned} \text{Champ des vitesses :} \\ \overrightarrow{V_{I \in 2/0}} &= \overrightarrow{V_{O_2 \in 2/0}} + \overrightarrow{IO_2} \wedge \overrightarrow{\Omega_{2/0}} \end{aligned}$$

$$\text{avec } \overrightarrow{V_{O_2 \in 2/0}} = \vec{0} \text{ et } \overrightarrow{IO_2} \wedge \overrightarrow{\Omega_{2/0}} = R_2 \cdot \vec{y}_0 \wedge \dot{\theta}_2 \cdot \vec{z}_0 = R_2 \cdot \dot{\theta}_2 \cdot \vec{x}_0$$

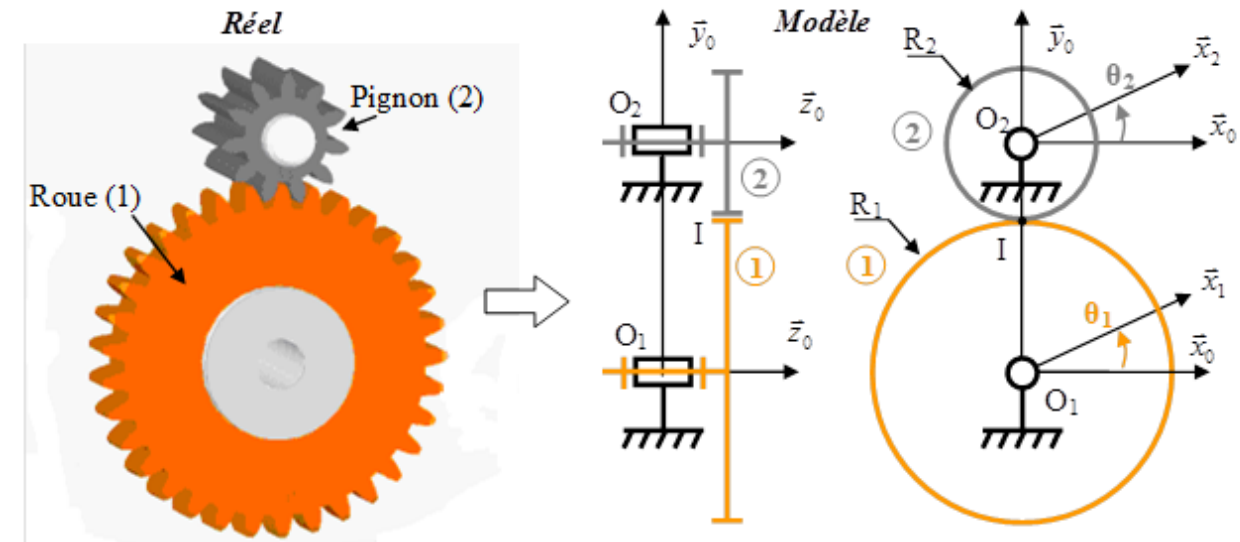
$$\rightarrow \overrightarrow{V_{I \in 2/0}} = R_2 \cdot \dot{\theta}_2 \cdot \vec{x}_0$$

Nature du mouvement de 1/0 ? :
Rotation autour de l'axe $(O_1, \vec{z}_0)$

$$\begin{aligned} \text{Champ des vitesses :} \\ \overrightarrow{V_{I \in 1/0}} &= \overrightarrow{V_{O_1 \in 1/0}} + \overrightarrow{IO_1} \wedge \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \end{aligned}$$

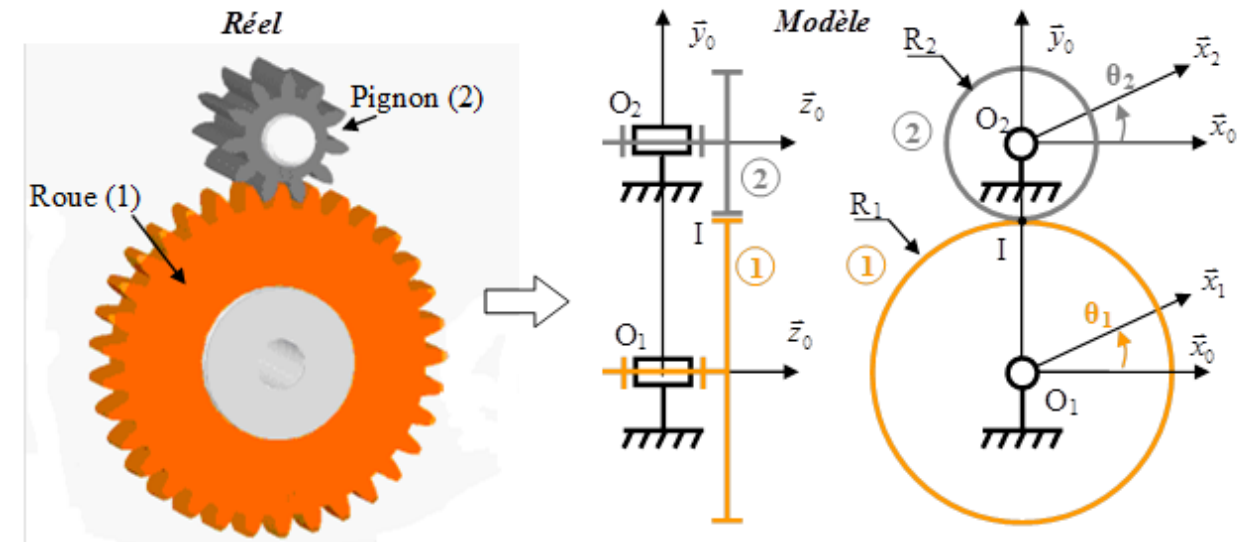
$$\text{avec } \overrightarrow{V_{O_1 \in 1/0}} = \vec{0} \text{ et } \overrightarrow{IO_1} \wedge \overrightarrow{\Omega_{1/0}} = -R_1 \cdot \vec{y}_0 \wedge \dot{\theta}_1 \cdot \vec{z}_0 = -R_1 \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \vec{x}_0$$

$$\rightarrow \overrightarrow{V_{I \in 1/0}} = -R_1 \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \vec{x}_0$$



Chaînes cinématiques fermées

Calcul d'une loi d'entrée sortie à partir d'une condition de non glissement



$$\text{Soit } \overrightarrow{V_{I \in 2/1}} = \overrightarrow{V_{I \in 2/0}} - \overrightarrow{V_{I \in 1/0}} = R_2 \cdot \dot{\theta}_2 \cdot \vec{x}_0 + R_1 \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \vec{x}_0 = \vec{0}$$

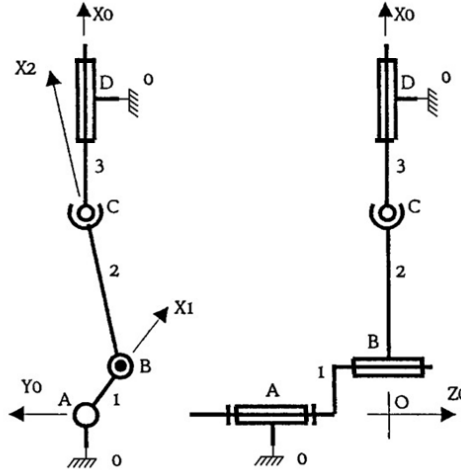
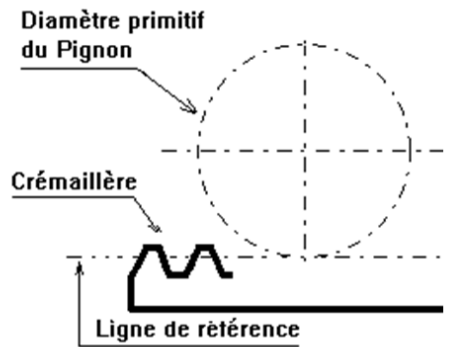
$$\rightarrow R_2 \cdot \dot{\theta}_2 + R_1 \cdot \dot{\theta}_1 = 0$$

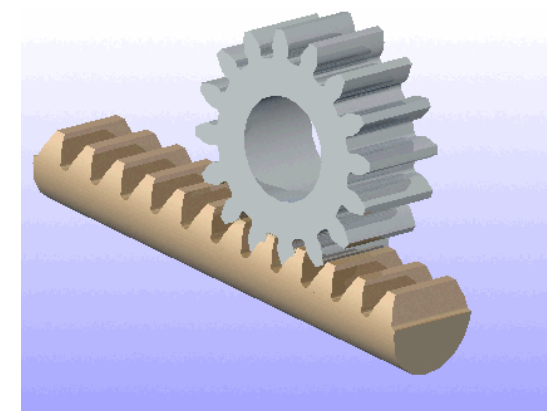
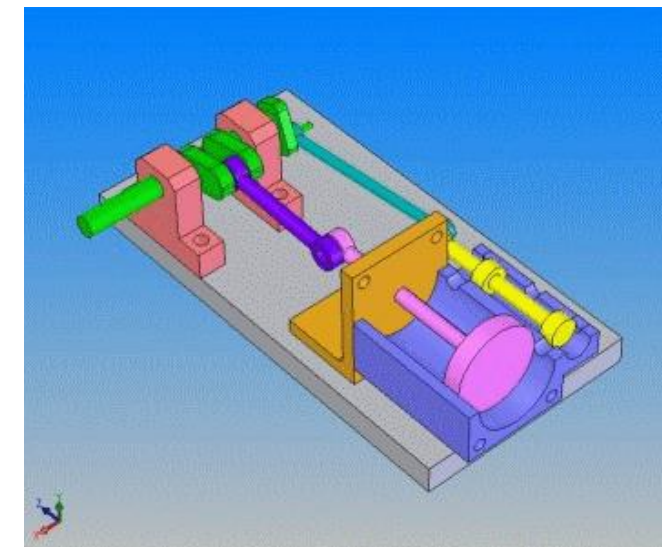
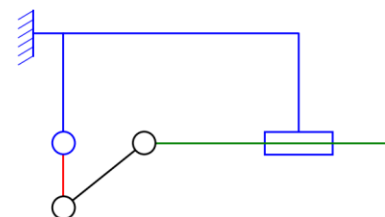
Soit la loi d'entrée sortie :

$$\frac{\dot{\theta}_2}{\dot{\theta}_1} = - \frac{R_1}{R_2}$$

Chaînes cinématiques fermées

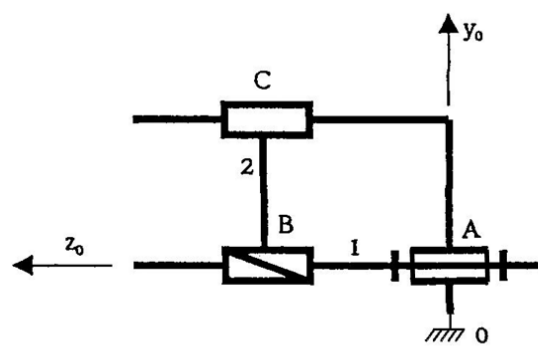
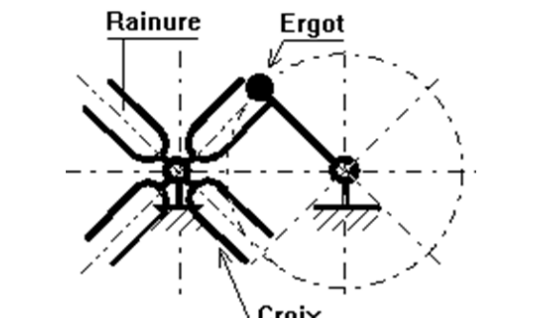
Transformations de mouvement classiques

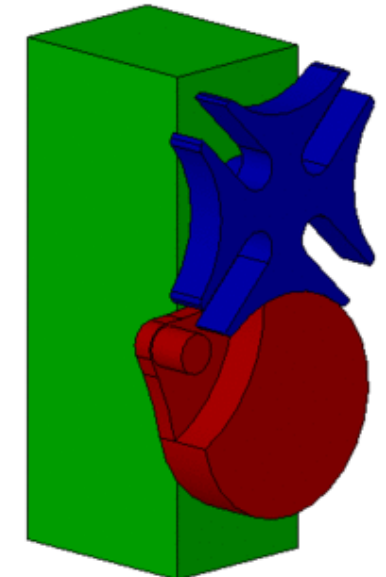
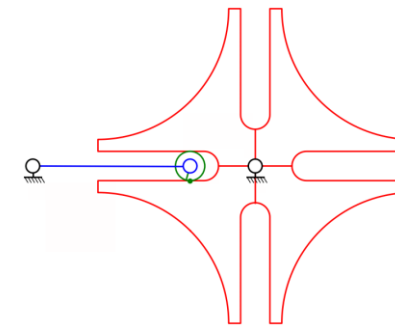
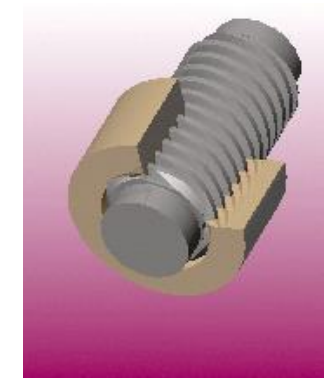
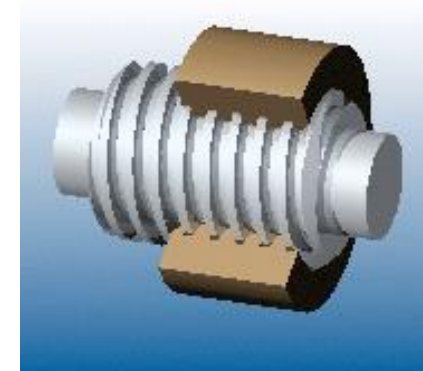
Bielle-manivelle.	 Pièce 1 : manivelle (ou maneton ou vilebrequin) Pièce 2 : bielle Pièce 3 : piston (ou coulisseau)	Transformation : Rotation continue en translation alternative (et réciproquement parfois). Réversibilité : parfois. Utilisation : Moteurs thermiques, compresseurs, certaines pompes et moteurs hydrauliques, marteau perforateur... NB : Dans un moteur thermique ou une pompe, le bâti au niveau du piston s'appelle chemise ou cylindre. Caractéristiques géométriques : $OB = e$ $BC = L$ Très souvent : $L \gg e$ ($L > 5.e$ suffit en général pour pouvoir faire cette hypothèse). Paramètres : $(\vec{x}_0, \vec{x}_1) = \alpha$ $(\vec{x}_0, \vec{x}_2) = \beta$ $\vec{OC} = X.\vec{x}_0$
Pignon-crémaillère	 Diamètre primitif du Pignon Crémaillère Ligne de référence	Transformation : Rotation continue en translation continue (et réciproquement). Réversibilité : toujours. Utilisation : Porte de TGV, porte de garage, direction de voiture, bras manipulateur... Caractéristiques géométriques : Diamètre du pignon. Paramètres : Angle de rotation du pignon, et position de la crémaillère.



Chaînes cinématiques fermées

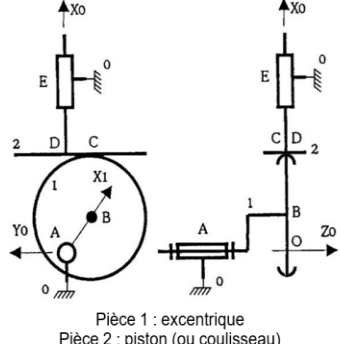
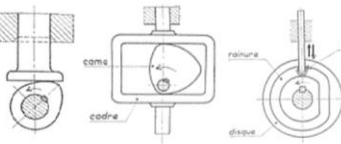
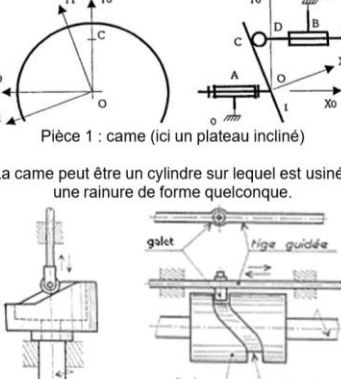
Transformations de mouvement classiques

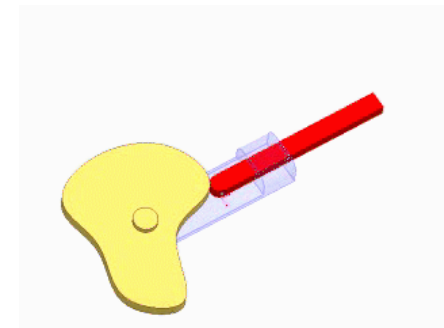
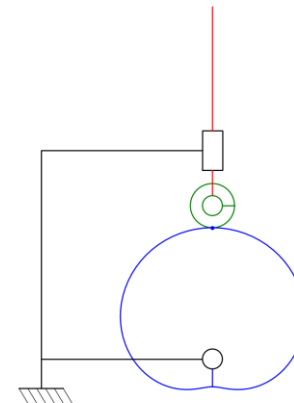
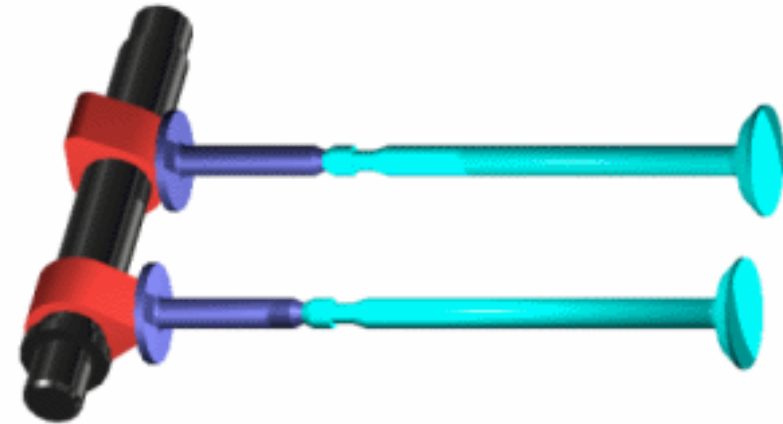
Vis-écrou	 Pièce 1 : vis Pièce 2 : coulisseau (ou écrou)	Transformation : Rotation continue en translation continue. Réversibilité : parfois. Elle dépend des matériaux en contact et de l'angle de l'hélice. Ce système est toujours réversible lorsque l'on a interposition d'éléments roulants limitant le frottement. Utilisation : Vérins électriques, chariots de machine outil, pilote automatique, élévateur... Caractéristiques géométriques : Pas de la vis : p (mm) à droite Paramètres : $(\overline{x_0}, \overline{x_1}) = \theta$ $\overline{AB} = \lambda \cdot \overline{z_0}$
Croix de Malte	 Rainure Ergot Croix	Transformation : Rotation continue en rotation intermittente. Réversibilité : jamais. Utilisation : Plateau tournant de machine de transfert, indexage... Caractéristiques géométriques : Angle entre les différentes rainures, et rayon de l'ergot. Paramètres : Angle de rotation de l'ergot, et angle de rotation de la croix.



Chaînes cinématiques fermées

Transformations de mouvement classiques

Excentrique	 Pièce 1 : excentrique Pièce 2 : piston (ou coulisseau)	Transformation : Rotation continue en translation alternative. Réversibilité : jamais. Utilisation : Pompes hydrauliques, taille haie, certains mécanismes d'ablocage (blocage d'une pièce sur une table). Caractéristiques géométriques : $BC = R$ $OB = e$ Paramètres : $(x_0, x_1) = \theta$ $\overrightarrow{OD} = X \cdot \overrightarrow{x_0}$ $\overrightarrow{CD} = \lambda \cdot \overrightarrow{y_0}$ <i>NB : L'excentrique est une came radiale circulaire</i>
Came radiale		Même principe que l'excentrique : L'excentrique qui était un disque est remplacée par une pièce de forme aléatoire (la came). Le schéma est identique au précédent mais avec R variable (mais connu). Utilisation : Pompes hydrauliques, certains mécanismes d'ablocage, arbre à cames de moteur, ferme-porte...
Came axiale	 Pièce 1 : came (ici un plateau incliné) La came peut être un cylindre sur lequel est usinée une rainure de forme quelconque.	Transformation : Rotation continue en translation alternative. Réversibilité : jamais. Utilisation : Pompes hydrauliques. Caractéristiques géométriques : $(x_1, x) = (y_1, y) = \alpha = \text{constant}$ $OD = R$ Le plan $(O, \vec{x}, \vec{y})$ définit le plateau. Paramètres : $(y_0, y_1) = \theta$ $\overrightarrow{CD} = X \cdot \overrightarrow{x_0}$



Chaînes cinématiques fermées

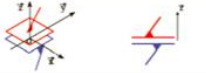
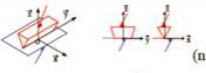
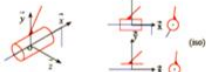
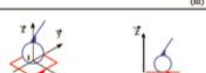
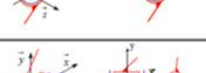
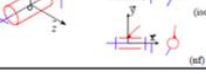
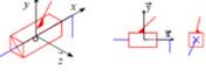
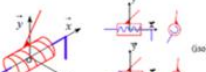
Transformations de mouvement classiques

Remarque : Rendement des différents systèmes de transmission :

- Came → 35 %
- Excentrique → 35 %
- Bielle-Manivelle → 40 %
- Vis/Ecrou → 50 %
- Croix de Malte → 60 %
- Vis/Ecrou à bille → 95 %
- Pignon/Crémaillère et Engrenages → 98 %

Liaisons normalisées

Rappels sur les torseurs

Surfaces en contact	Nom de la liaison	Schématisation Vue isométrique / Vues projetées	Degrés de liberté / Torseur cinématique
Plan/Plan	Liaison appui-plan 		2 translations / 1 rotation $\{V_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} 0 & v_x \\ 0 & v_y \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}_{(T,T,T)}$
Cylindre/plan	Liaison linéaire-rectiligne 		2 translations / 2 rotations $\{V_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} 0 & v_x \\ \omega_y & v_y \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}_{(T,T,T)}$
Cylindre/cylindre	Liaison pivot-glissant 		1 translation / 1 rotation $\{V_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} \omega_x & v_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(T,T,T)}$
Sphère/plan	Liaison ponctuelle ou sphère-plan 		2 translations / 3 rotations $\{V_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} \omega_x & v_x \\ \omega_y & v_y \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}_{(T,T,T)}$
Sphère/cylindre	Liaison linéaire-annulaire ou sphère-cylindre 		1 translation / 3 rotations $\{V_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} \omega_x & v_x \\ \omega_y & 0 \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}_{(T,T,T)}$
Sphère/sphère	Liaison rotule ou sphérique 		0 translation / 3 rotations $\{V_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} \omega_x & 0 \\ \omega_y & 0 \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}_{(T,T,T)}$
Composée : cylindre/cylindre et plan/plan	Liaison pivot 		0 translation / 1 rotation $\{V_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} \omega_x & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(T,T,T)}$
Composée : plan/plan et plan/plan	Liaison glissière 		1 translation / 0 rotation $\{V_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} 0 & v_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(T,T,T)}$
Hélicoïde/hélicoïde	Liaison hélicoïdale 		1 translation liée à 1 rotation $\{V_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} \omega_x & v_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(T,T,T)}$ Avec $v_y = \frac{p}{2\pi} \omega_z$
Composée : sphère/sphère et cylindre/plan	Liaison sphérique à doigt 		0 translation / 2 rotations $\{V_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} \omega_x & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}_{(T,T,T)}$
	Liaison encastrement 		0 translation / 0 rotation $\{V_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(T,T,T)}$

Liaisons normalisées

Rappels sur les torseurs

Définition : Une liaison équivalente est une liaison du tableau normalisé autorisant les mêmes mouvements et transmettant les mêmes efforts que l'association de liaisons en série ou en parallèle.

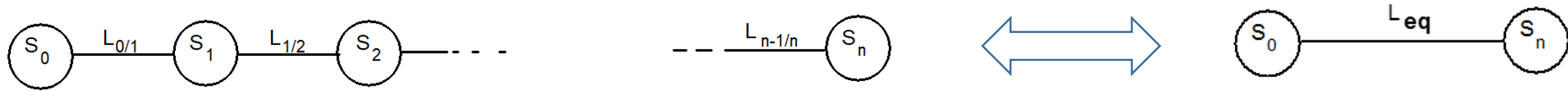
Remarques : Il n'est pas toujours possible de trouver une liaison équivalente.

Liaisons normalisées

Rappels sur les torseurs

Liaisons en série

Grphe des liaisons :



Liaison équivalente : $L_{eq} \rightarrow$ cinématiquement équivalente aux L_n
 $\rightarrow$ si $\rightarrow$ autorise le même mouvement relatif

Torseur cinématique :

Loi de composition des mouvements : $\left\{ \mathbf{V}_{(\mathcal{L}_{eq})} \right\}_M = \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ \mathbf{V}_{(\mathcal{S}_{i+1}/\mathcal{S}_i)} \right\}_M$

$$\left\{ \mathbf{V}_{(\mathcal{L}_{eq})} \right\}_M = \left\{ \mathbf{V}_{(\mathcal{L}_{0/1})} \right\}_M + \left\{ \mathbf{V}_{(\mathcal{L}_{1/2})} \right\}_M + \left\{ \mathbf{V}_{(\mathcal{L}_{2/3})} \right\}_M + \dots + \left\{ \mathbf{V}_{(\mathcal{L}_{n-1/n})} \right\}_M$$

Liaisons normalisées

Rappels sur les torseurs

Liaisons en série

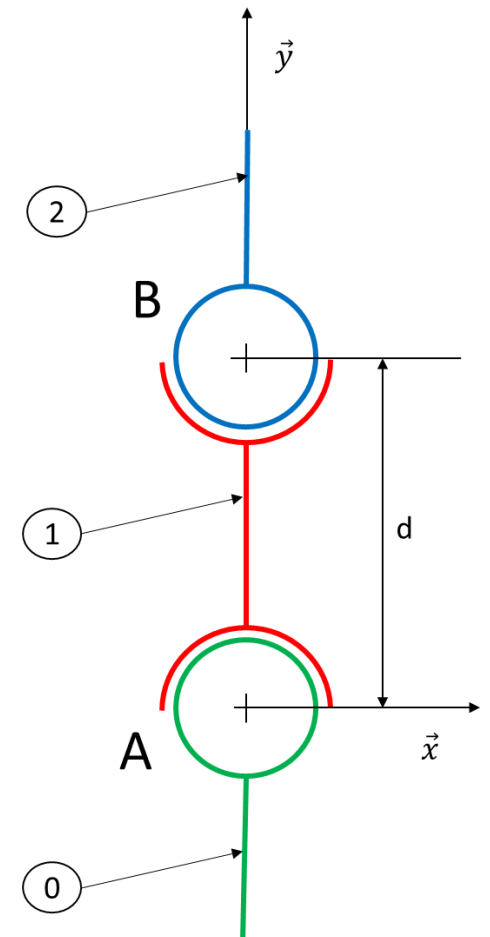
Exemple de recherche de liaison équivalente à des liaisons en série :

Torseur cinématique de la liaison sphérique $L_{2/1}$:

$$\{V_{L_{2/1}}\} = \begin{Bmatrix} \omega_{x\ 2/1} & 0 \\ \omega_{y\ 2/1} & 0 \\ \omega_{z\ 2/1} & 0 \end{Bmatrix}_{B,b}$$

Torseur cinématique de la liaison sphérique $L_{1/0}$:

$$\{V_{L_{1/0}}\} = \begin{Bmatrix} \omega_{x\ 1/0} & 0 \\ \omega_{y\ 1/0} & 0 \\ \omega_{z\ 1/0} & 0 \end{Bmatrix}_{A,b}$$



Liaisons normalisées

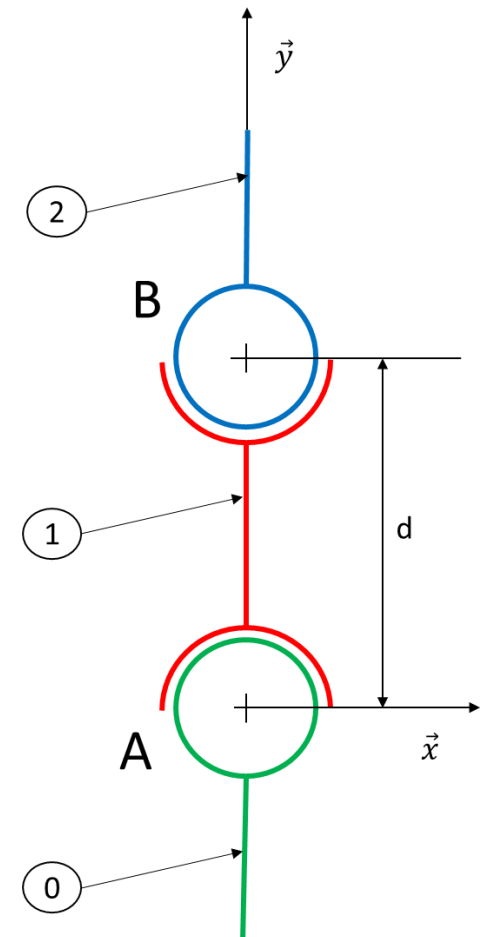
Rappels sur les torseurs

Liaisons en série

Exemple de recherche de liaison équivalente à des liaisons en série :

Transfert de la liaison $L_{2/1}$ en A :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{V_{A \in 2/1}} &= \underbrace{\overrightarrow{V_{B \in 2/1}}}_{\vec{0}} + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{\Omega_{2/1}} = \begin{pmatrix} 0 \\ d \\ 0 \end{pmatrix}_b \wedge \begin{pmatrix} \omega_{x \ 2/1} \\ \omega_{y \ 2/1} \\ \omega_{z \ 2/1} \end{pmatrix}_b \\ &= \begin{pmatrix} +d \cdot \omega_{z \ 2/1} \\ 0 \\ -d \cdot \omega_{x \ 2/1} \end{pmatrix}_b\end{aligned}$$



Liaisons normalisées

Rappels sur les torseurs

Liaisons en série

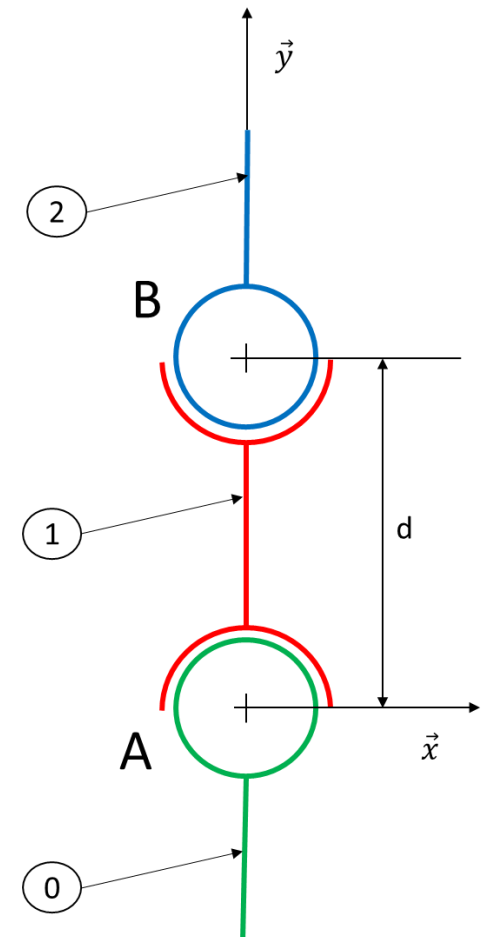
Exemple de recherche de liaison équivalente à des liaisons en série :

$$\{V_{Leq}\}_{A,b} = \{V_{L_{2/1}}\}_{A,b} + \{V_{L_{1/0}}\}_{A,b}$$

Soit :

$$\begin{cases} \omega_{x eq} = \omega_{x 2/1} + \omega_{x 1/0} \\ \omega_{y eq} = \omega_{y 2/1} + \omega_{y 1/0} \\ \omega_{z eq} = \omega_{z 2/1} + \omega_{z 1/0} \\ V_{x eq} = +d \cdot \omega_{z 2/1} \\ V_{y eq} = 0 \\ V_{z eq} = -d \cdot \omega_{x 2/1} \end{cases}$$

La seule composante nulle est $V_{y eq}$, la liaison équivalente est donc une liaison sphère-plan de normale $(A, \vec{y})$.

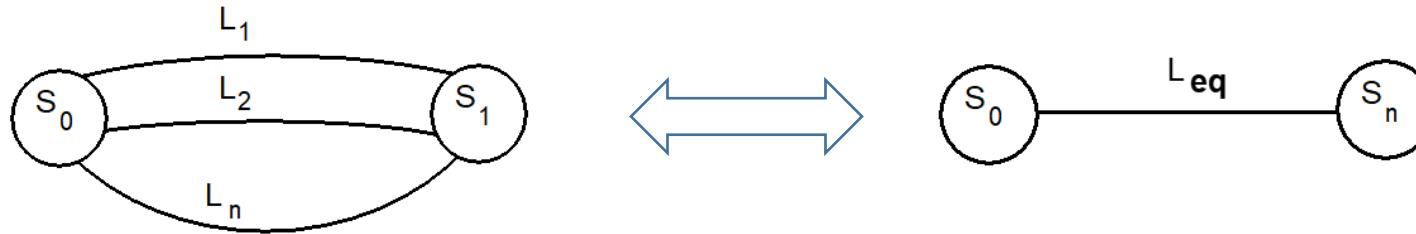


Liaisons normalisées

Rappels sur les torseurs

Liaisons en parallèle

Graphe des liaisons :



Liaison équivalente : Torseur cinématique $L_{eq} \rightarrow$ compatible avec tous les torseurs cinématiques des L_i

Torseur cinématique :

$$\{V_{L_{eq}}\}_M = \{V_{L_i}\}_M \forall i$$

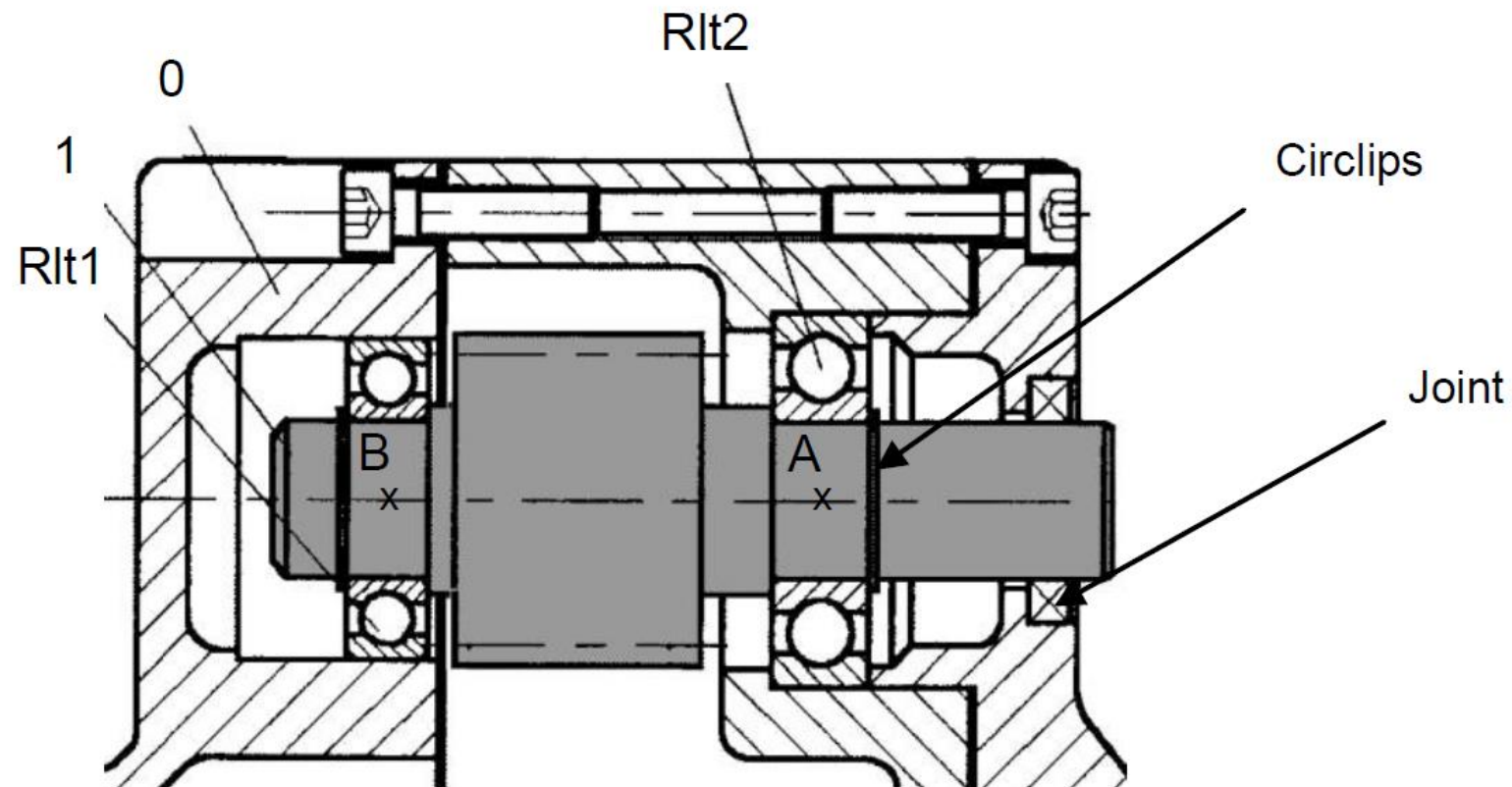
$$\{V_{L_{eq}}\}_M = \{V_{L_1}\}_M = \{V_{L_2}\}_M = \{V_{L_3}\}_M = \dots = \{V_{L_n}\}_M$$

Liaisons normalisées

Rappels sur les torseurs

Liaisons en parallèle

Exemple de recherche de liaison équivalente à des liaisons en parallèle :



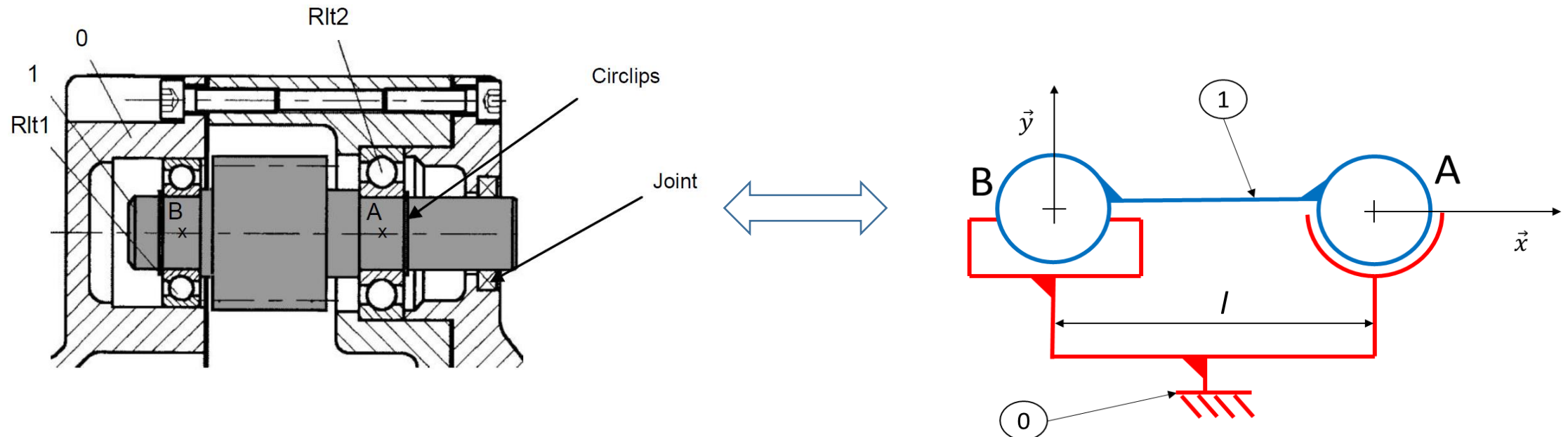
Liaisons normalisées

Rappels sur les torseurs

Liaisons en parallèle

Exemple de recherche de liaison équivalente à des liaisons en parallèle :

Schéma cinématique mécanisme :



Liaisons normalisées

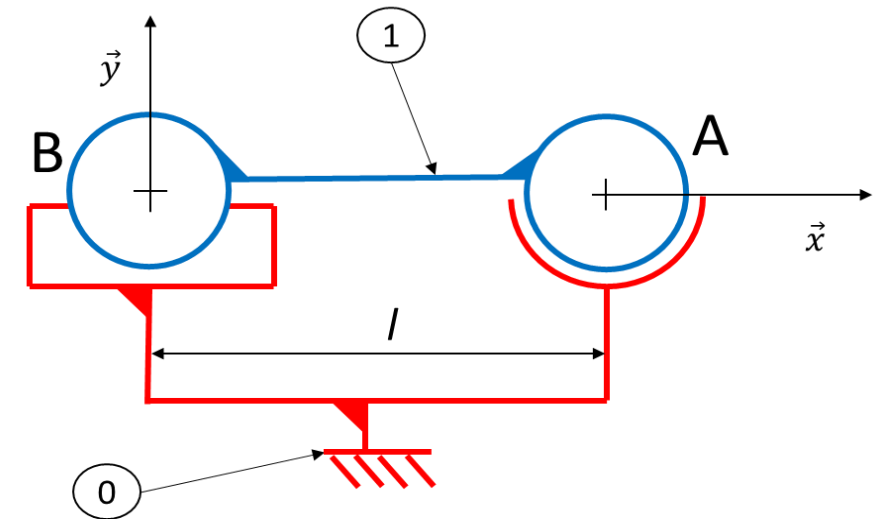
Rappels sur les torseurs

Liaisons en parallèle

Exemple de recherche de liaison équivalente à des liaisons en parallèle :

Liaison sphérique en A : $\{V_{L_A}\} = \begin{Bmatrix} \omega_x A & 0 \\ \omega_y A & 0 \\ \omega_z A & 0 \end{Bmatrix}_{A,b}$

Liaison sphère-cylindre en B : $\{V_{L_B}\} = \begin{Bmatrix} \omega_x B & V_{x B} \\ \omega_y B & 0 \\ \omega_z B & 0 \end{Bmatrix}_{B,b}$



Liaisons normalisées

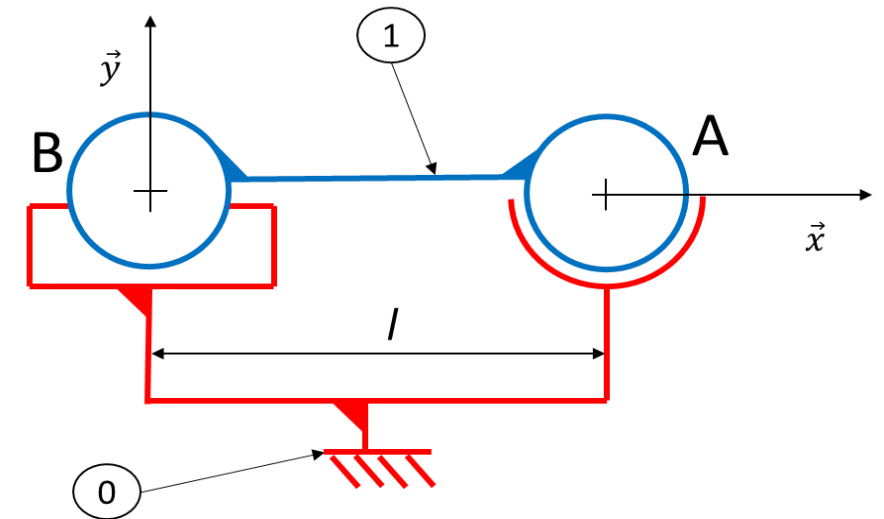
Rappels sur les torseurs

Liaisons en parallèle

Exemple de recherche de liaison équivalente à des liaisons en parallèle :

Transfert de la liaison en A :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{V_{A \in 3_B / 0}} &= \underbrace{\overrightarrow{V_{B \in 3_B / 0}}}_{V_{xB} \vec{x}} + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{\Omega_{3/0}} = \begin{pmatrix} V_{xB} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_b + \begin{pmatrix} -l \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_b \wedge \begin{pmatrix} \omega_{xB} \\ \omega_{yB} \\ \omega_{zB} \end{pmatrix}_b \\ &= \begin{pmatrix} V_{xB} \\ +l \cdot \omega_{zA} \\ -l \cdot \omega_{yA} \end{pmatrix}_b\end{aligned}$$



Liaisons normalisées

Rappels sur les torseurs

Liaisons en parallèle

Exemple de recherche de liaison équivalente à des liaisons en parallèle :

$$\{V_{L_A}\}_{A,b} = \{V_{L_B}\}_{A,b} = \{V_{Leq}\}_{A,b}$$

$$\omega_{x A} = \omega_{x B} = \omega_{x eq} ;$$

$$\omega_{z A} = \omega_{z B} = \omega_{z eq} ;$$

$$+l \cdot \omega_{z B} = 0 ;$$

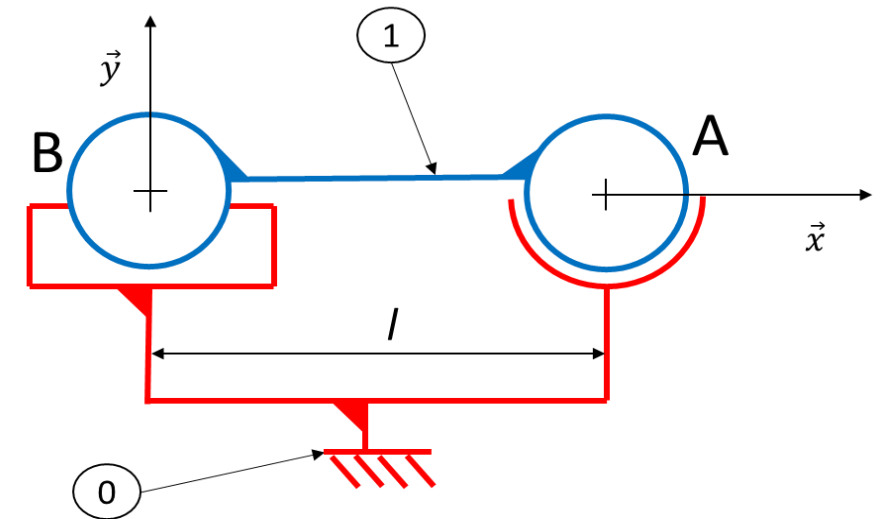
$$\omega_{y A} = \omega_{y B} = \omega_{y eq} ;$$

$$0 = V_{x B} = V_{x eq} ;$$

$$-l \cdot \omega_{y B} = 0$$

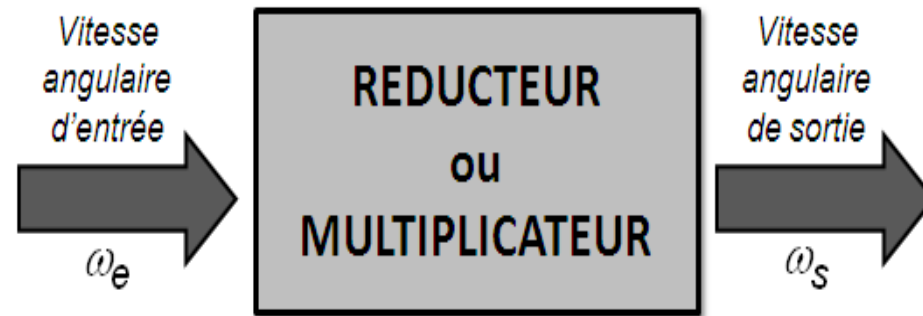
$$\{V_{Leq}\}_{A,b} = \begin{Bmatrix} \omega_{x eq} = \omega_{x A} = \omega_{x B} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{A,b}$$

→ Liaison pivot d'axe $(A, \vec{x})$.



Contact ponctuel / RSG : ENGRENAGES

Réducteurs et multiplicateurs de vitesse



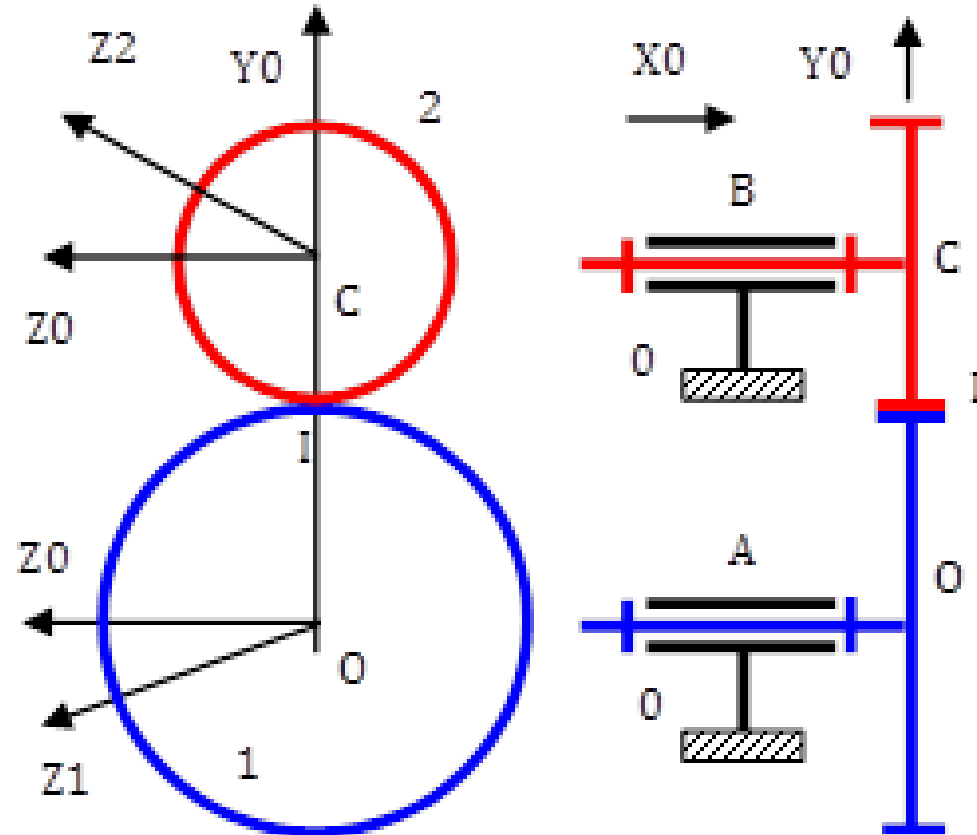
Transmetteurs :

- Utilisant la transmission par adhérence : roue à friction (exemple : dynamo de vélo), dispositif poulie- courroie lisse (exemple : alternateur de voiture)
- Utilisant la transmission par obstacle : dispositif poulie-courroie crantée (exemple : courroie de distribution d'une voiture), dispositif pignon-chaîne (exemple : vélo, moto), engrenages (exemple : boîte de vitesse).

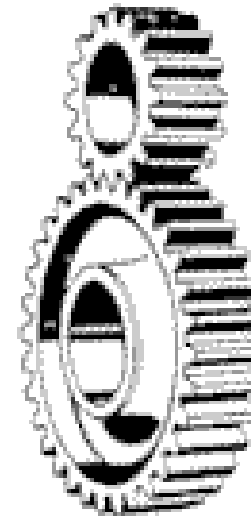
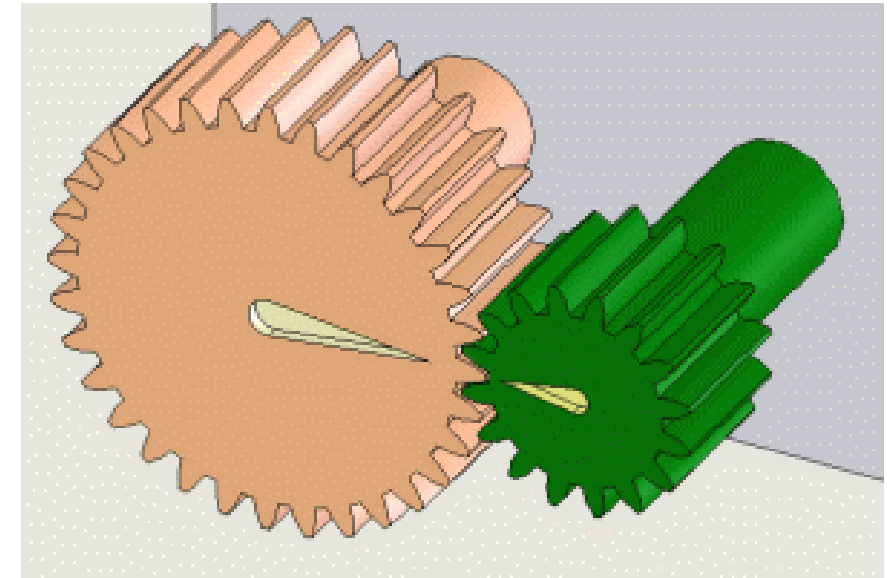
Remarque : Rapport de transmission d'un système : $r = \frac{\omega_{e/0}}{\omega_{s/0}}$ (avec 0 le bâti).

Contact ponctuel / RSG : ENGRENAGES

Application du RSG



$$\begin{aligned}\overrightarrow{OI} &= R_1 \overrightarrow{y_0} \\ \overrightarrow{IC} &= R_2 \overrightarrow{y_0}\end{aligned}$$



Engrènement : Modélisation du contact

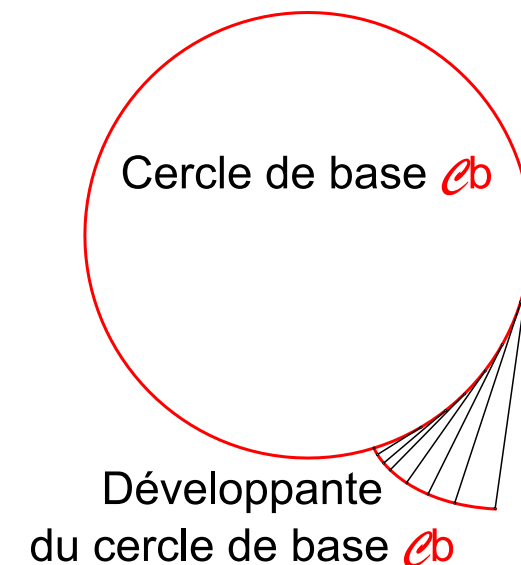
Développante de cercle

Imaginez une bobine de fil. Marquez le fil d'un point et débobinez en maintenant la bobine fixe et le fil tendu : le point décrira une **développante de cercle**.

Définition : La développante du cercle est obtenue en faisant **rouler sans glisser une droite Δ** marquée d'un point sur le cercle de base.

Droite graduée : unité : pas de base : p_b .

Δ roule sans glisser sur le cercle de base



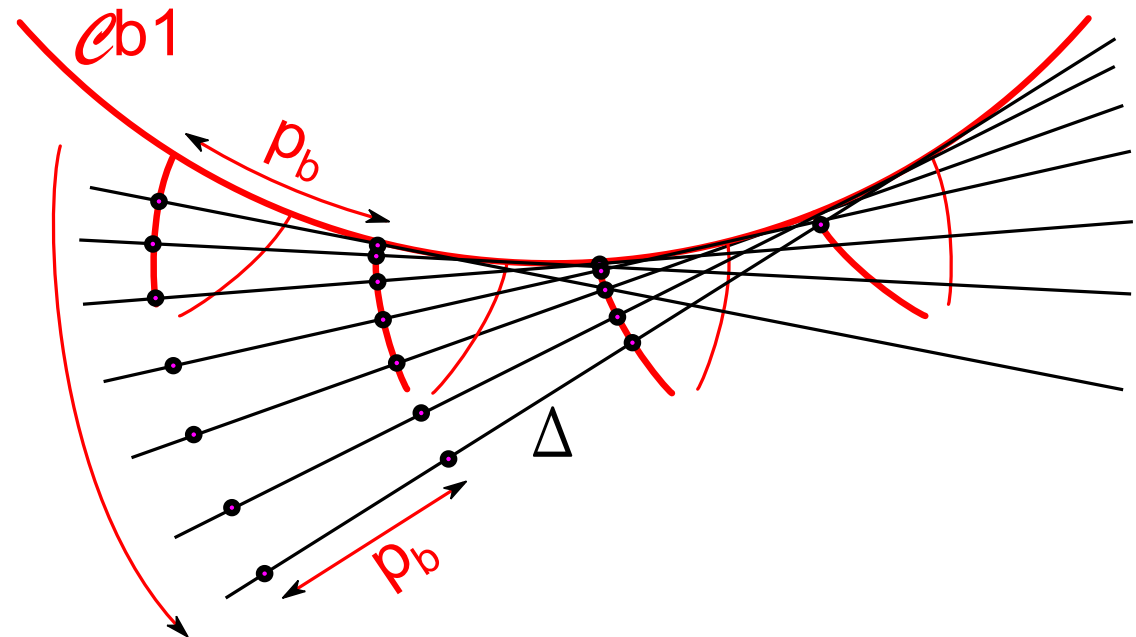
Engrènement : Modélisation du contact

Profil des dents

Par construction, **le profil de la dent est en permanence perpendiculaire à Δ** .

Pas de base $p_b \rightarrow 2\pi R_b = Z.p_b$ $Z = \underline{\text{nombre entier}}$ de dents.

Second profil $\rightarrow$ Rouler sans glisser la droite Δ dans l'autre sens après l'avoir décalée de $p_b/2$.



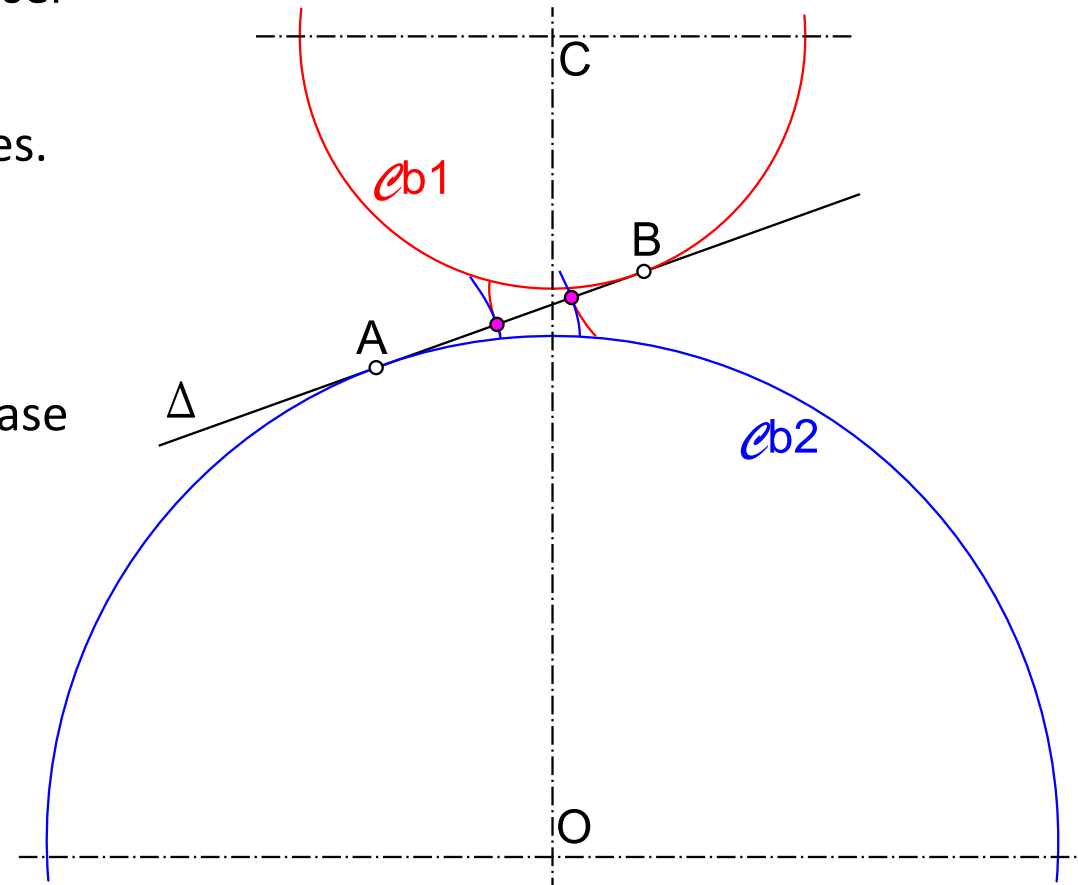
Engrènement : Modélisation du contact

Profil des dents

Deux cercles de base $Cb1$ et $Cb2$, Δ roule sans glisser sur l'un des cercles de base, puis sur l'autre

→ Génération des développantes des deux cercles de bases.

Par construction, chaque développante d'un cercle de base est en contact avec une développante de l'autre.



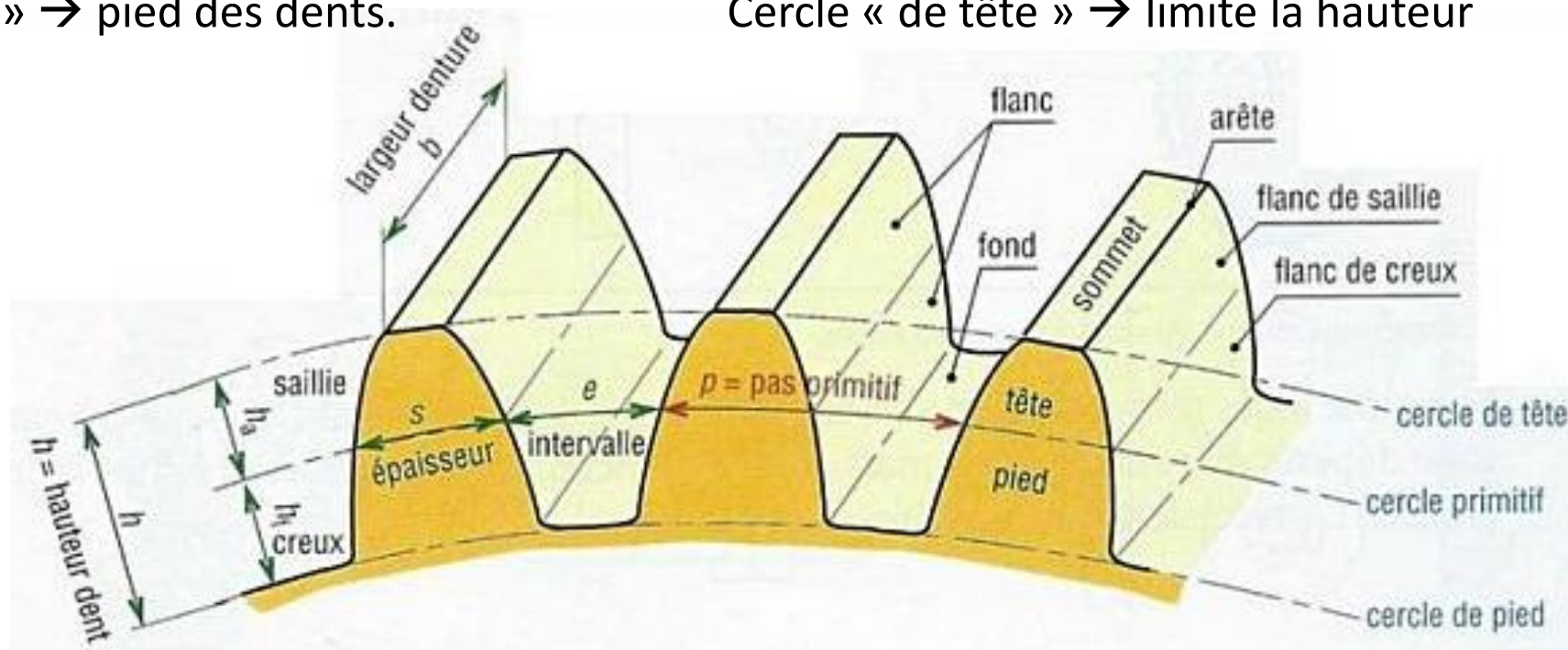
Engrènement : Modélisation du contact

Profil des dents

Les développantes → matérialisent des roues dentées qui engrènent donc parfaitement et sans interruption du contact.

Cercle « de pied » → pied des dents.

Cercle « de tête » → limite la hauteur

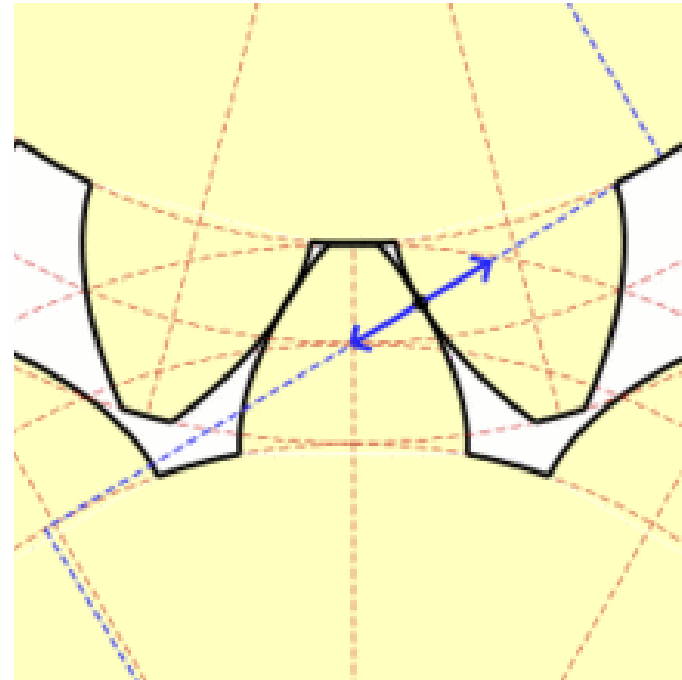
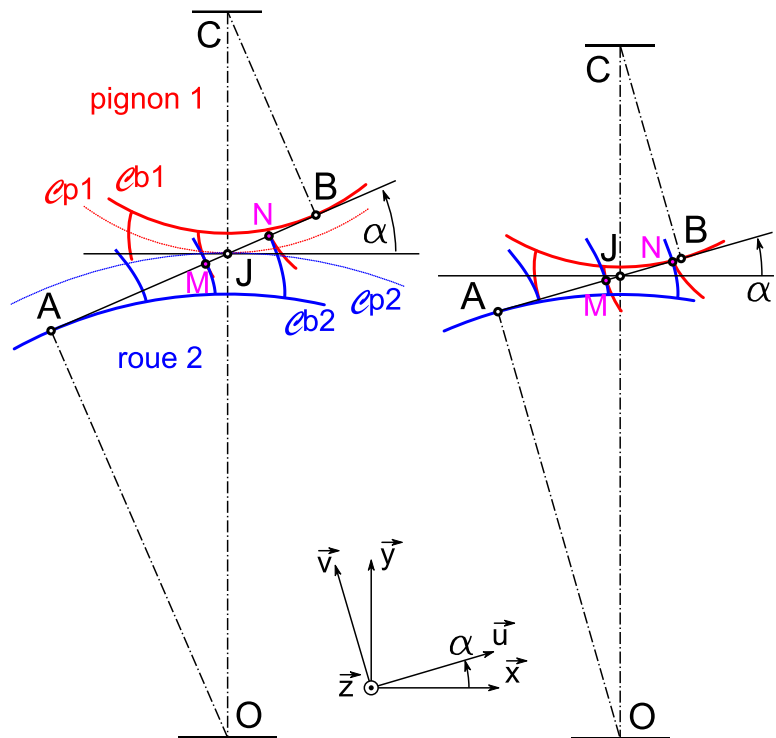


Engrènement : Modélisation du contact

Engrènement de deux roues dentées

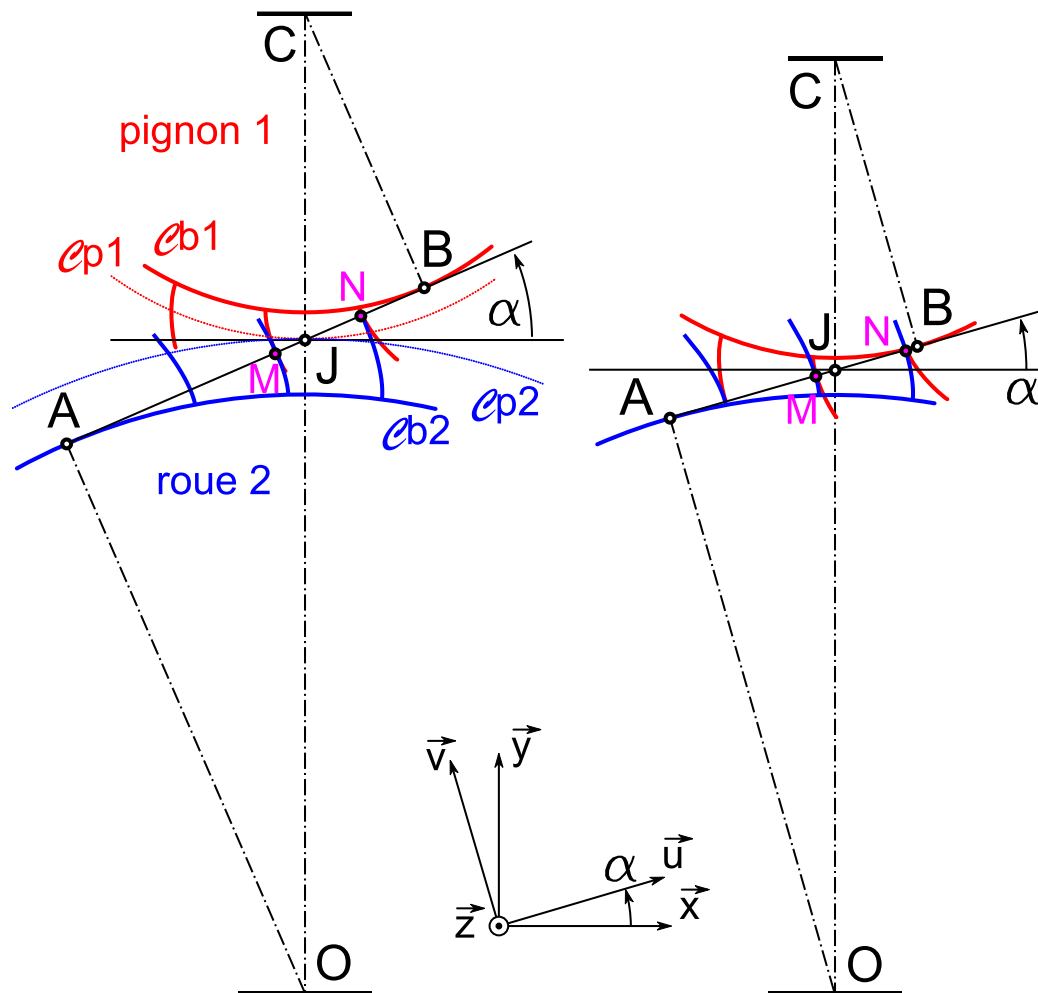
2 roues dentées $\rightarrow$ Cercles de base $Cb1$ et $Cb2$, de centres respectifs C et O .

La droite qui permet de définir la denture en développante $\rightarrow$ tangente aux deux cercles en A et B .



Engrènement : Modélisation du contact

Engrènement de deux roues dentées



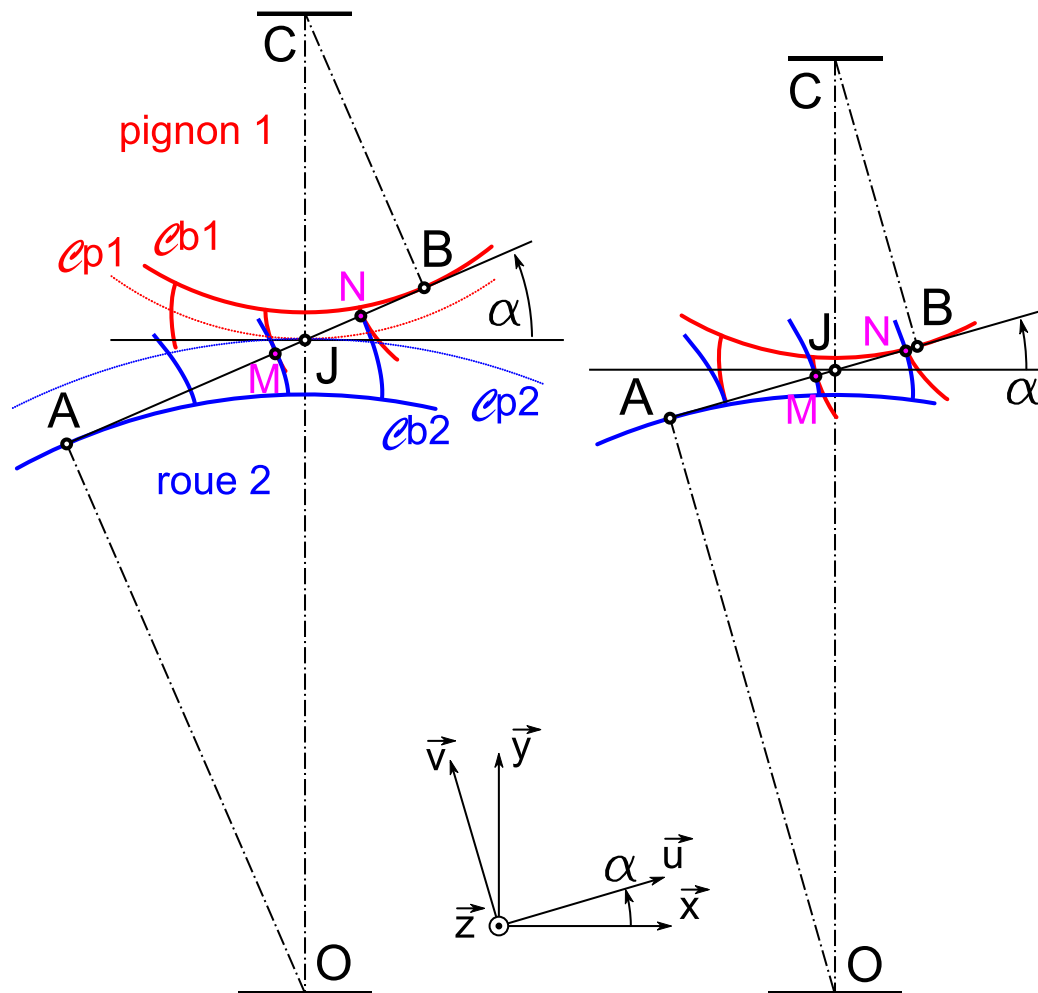
M et N $\rightarrow$ 2 points de contact entre deux dents successives.

M et N $\rightarrow$ se déplacent sur la tangente (AB) normale au contact.

Normale $\rightarrow$ **droite d'action** ou **ligne d'engrènement**.

Engrènement : Modélisation du contact

Engrènement de deux roues dentées



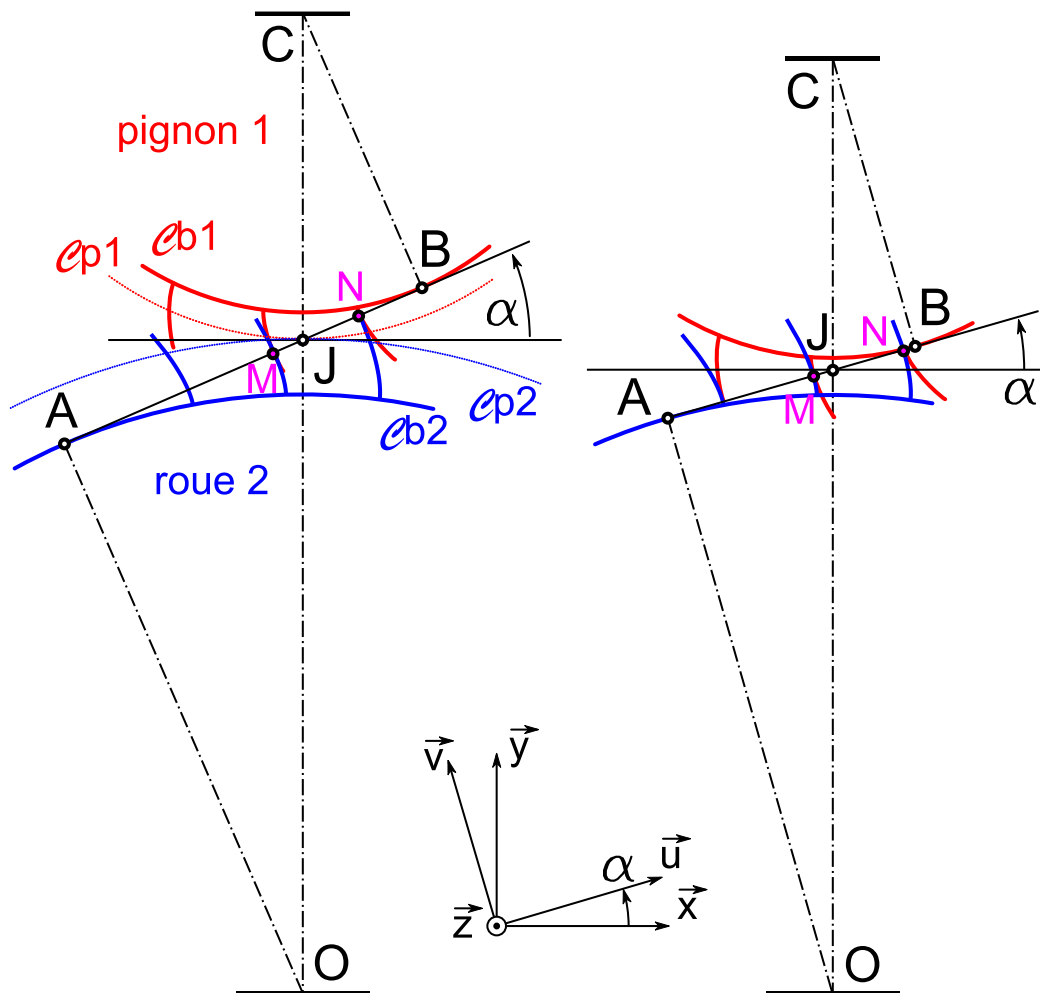
Angle de pression α et le point J à l'intersection de (AB) et (OC) .

Point $J \rightarrow$ pour chaque roue dentée $\rightarrow$ **cercle primitif** (Cp_i) de **rayon primitif** R_i .

Entraxe des roues : $[OC] = R_1 + R_2$.

Engrènement : Modélisation du contact

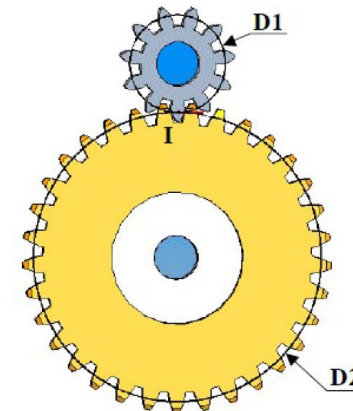
Engrènement de deux roues dentées



Angle de pression standard est $\alpha = 20^\circ$.

$$OC = R_1 + R_2 = \frac{R_{b1} + R_{b2}}{\cos(\alpha)}$$

Dans la suite, nous n'utiliserons plus que les cercles primitifs.



Engrènement de deux roues dentées


$$D = m. Z$$

avec m : le module de la roue dentée

Engrènement : Modélisation du contact

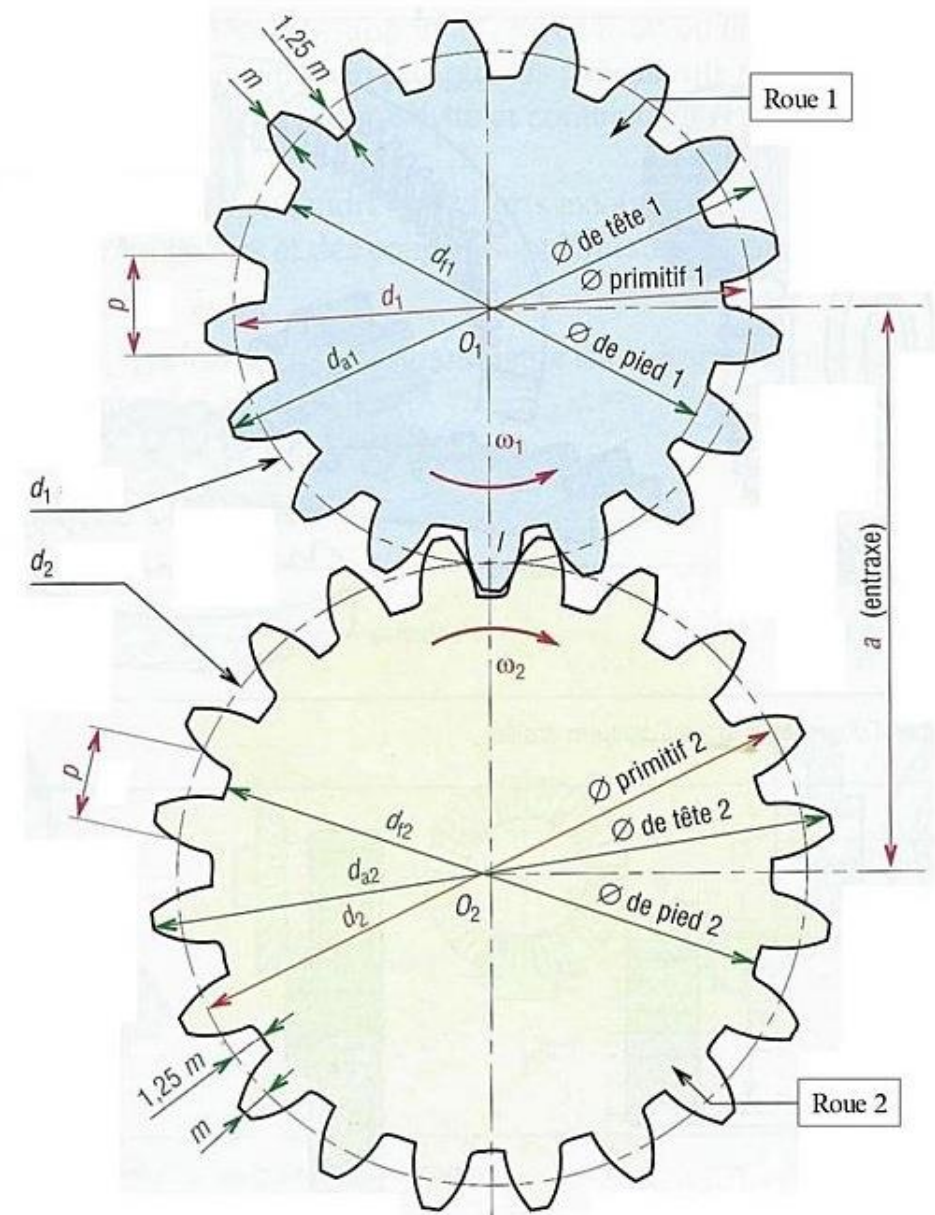
Engrènement de deux roues dentées

Pour que deux roues dentées engrènent elles doivent avoir le même module.

Le rapport des rayons est égal au rapport des nombres de dents.

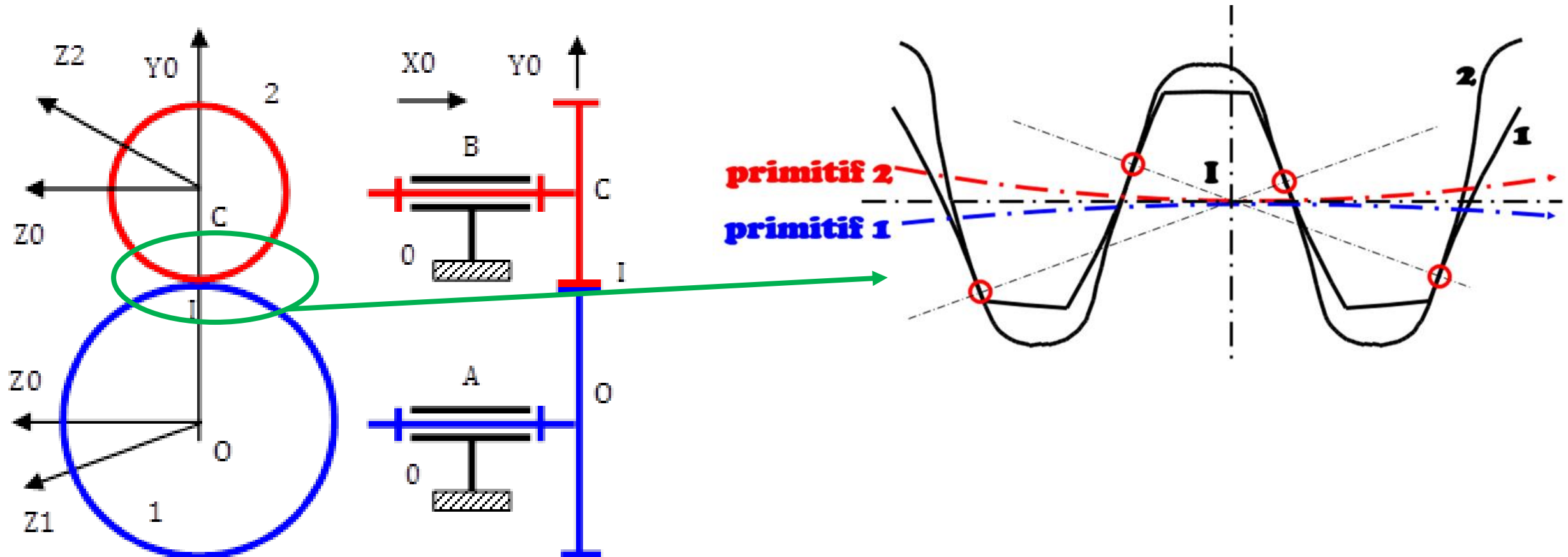
En effectuant le RSG en I, on obtient donc :

$$\frac{\omega_{20}}{\omega_{10}} = -\frac{R_1}{R_2} = -\frac{Z_1}{Z_2}$$



Engrènement : Modélisation du contact

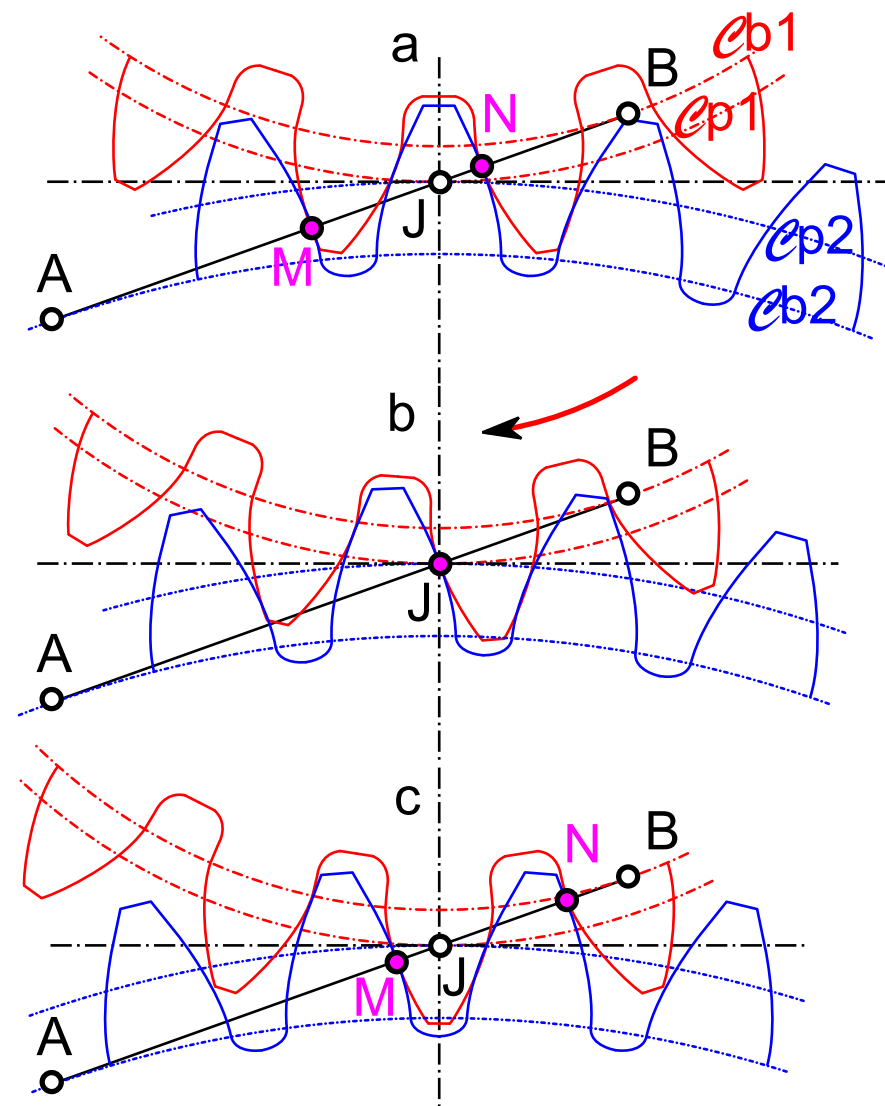
Nombre et zones de contacts



Engrènement : Modélisation du contact

Nombre et zones de contacts

Plus de deux dents en contact en permanence
(pas et module petit) → meilleure régularité
de l'engrènement et moins de bruit.



Engrènement : Modélisation du contact

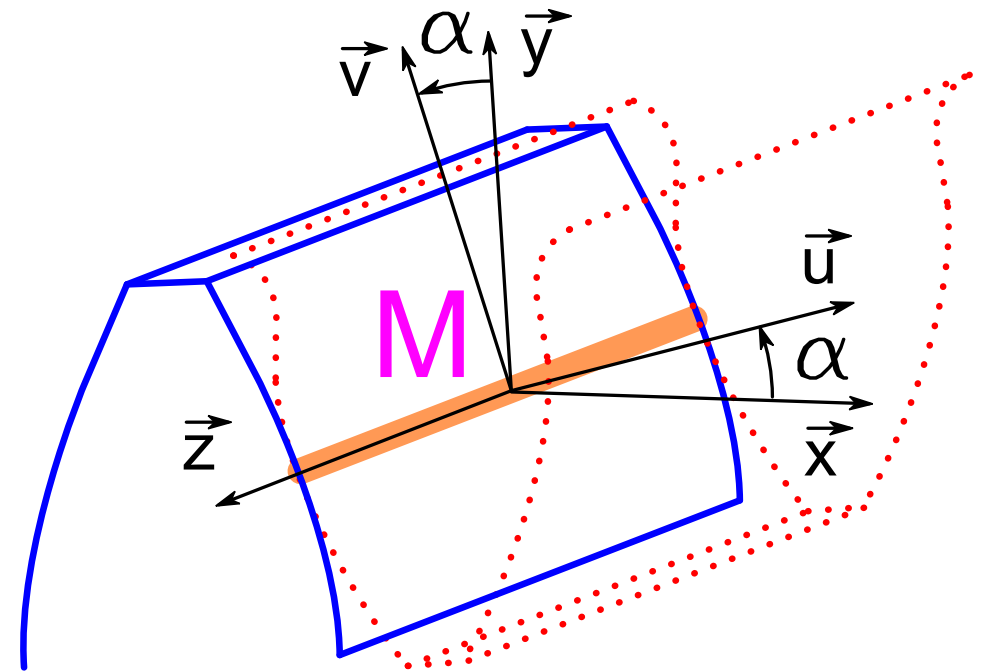
Nombre et zones de contacts

Selon l'épaisseur de la denture $\rightarrow$ Contact

$\rightarrow$ **liaison ponctuelle** (denture étroite)

$\rightarrow$ **liaison linéaire rectiligne** (denture large).

Plusieurs paires de dents en contacts $\rightarrow$ liaison
 $\rightarrow$ modélisée par autant de liaisons ponctuelles
(ou linéaires rectilignes), en parallèles.



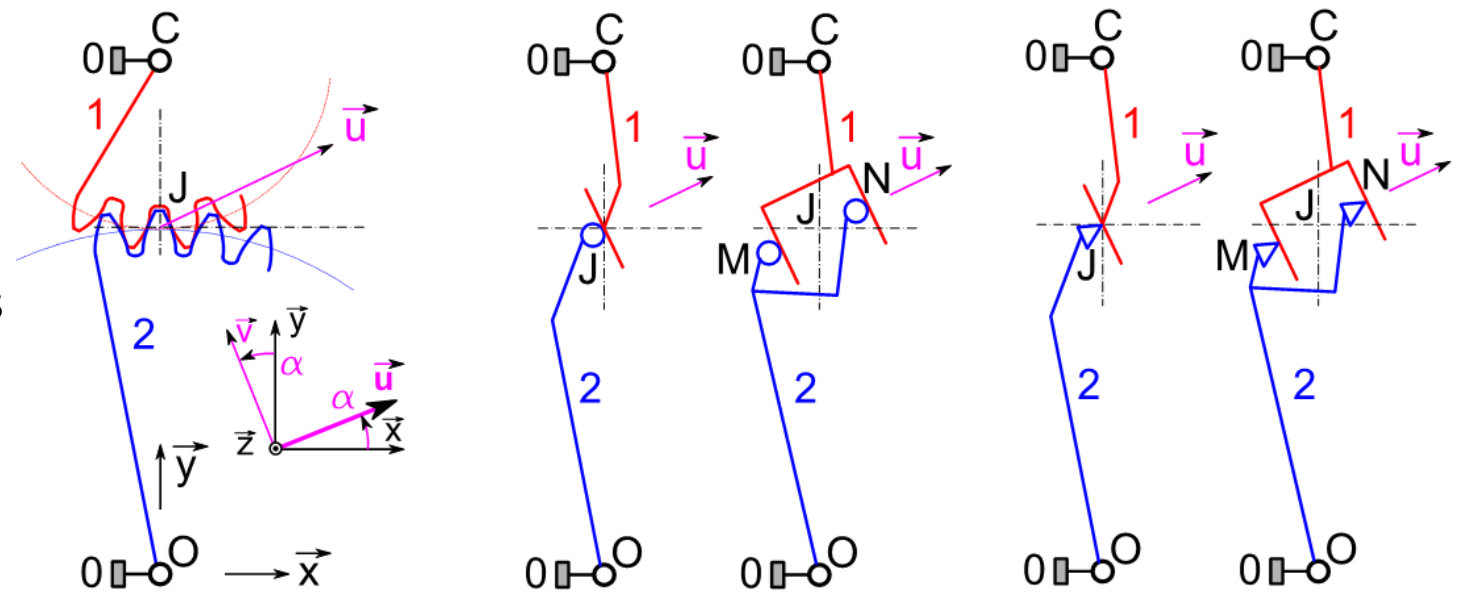
**Ces liaisons sont toutes localisées sur la même droite $(J, \vec{u})$ et orientée par la normale $\vec{u}$.
C'est tout l'intérêt des dentures en développante.**

Engrènement : Modélisation du contact

Nombre et zones de contacts

Modélisation (+ largeur des dents) :

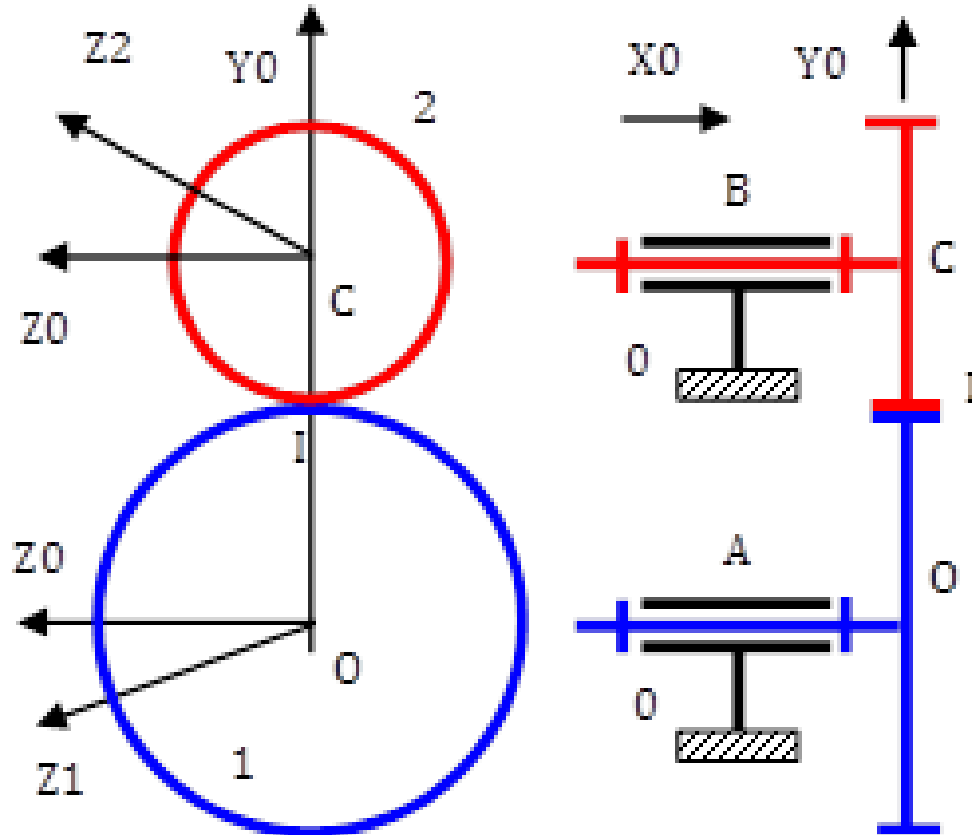
- une ou deux liaisons ponctuelles
- une ou deux liaisons linéaires rectilignes



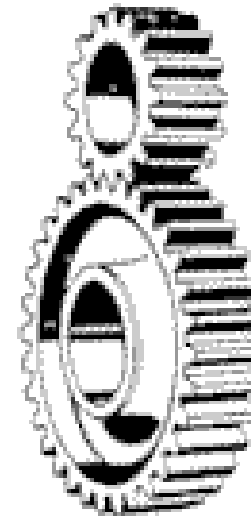
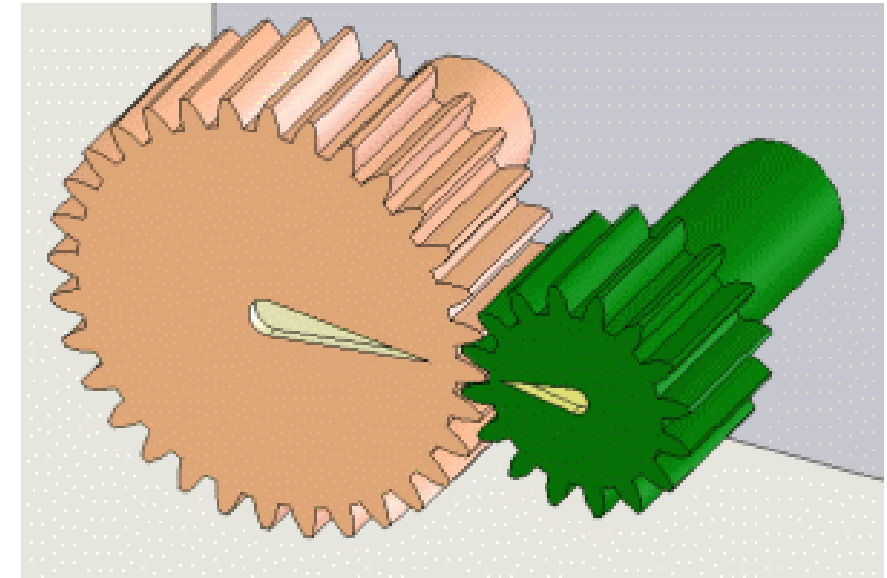
Normales des liaisons $\rightarrow$ orientées selon le vecteur $\vec{u}$, incliné de l'angle de pression $\alpha = 20^\circ$

Contact ponctuel / RSG : ENGRENAGES

Application du RSG

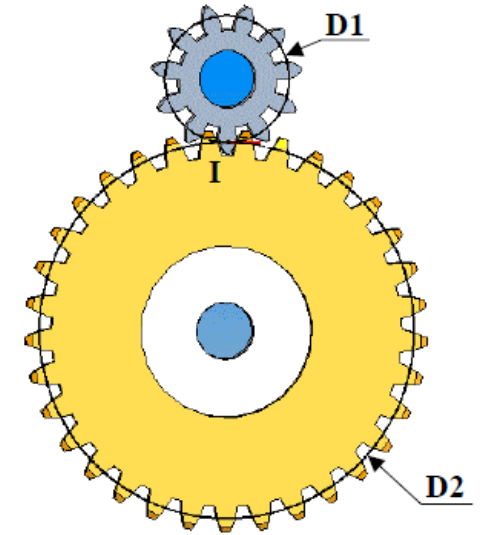
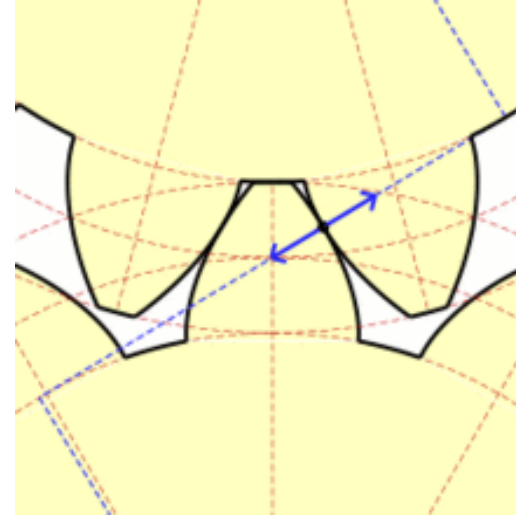
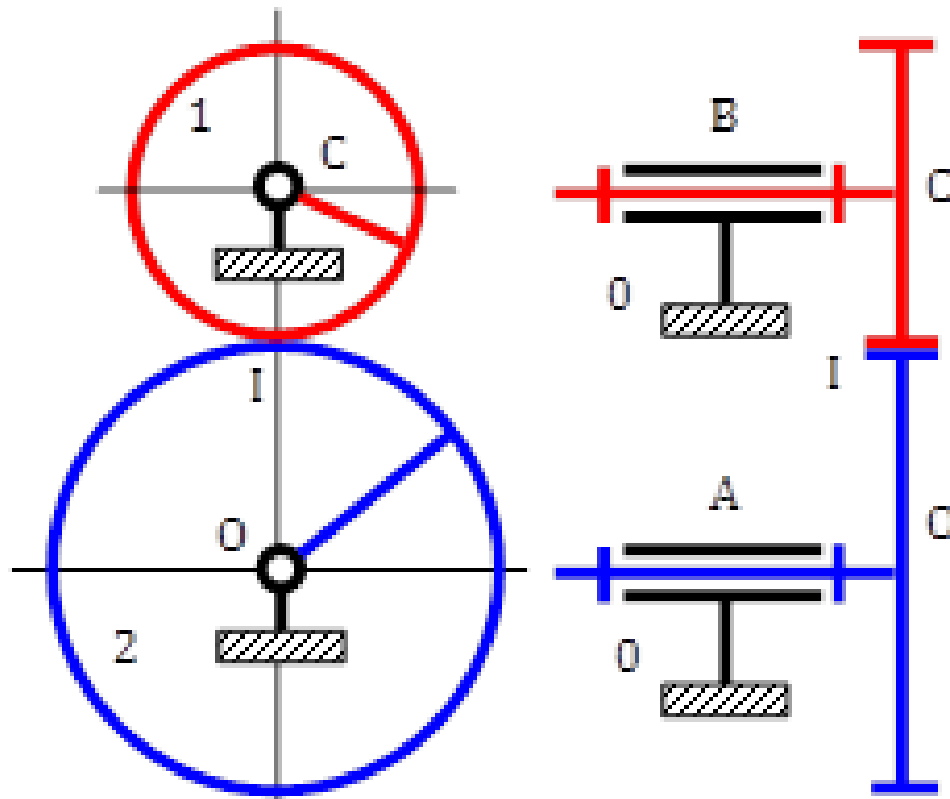


$$\begin{aligned}\overrightarrow{OI} &= R_1 \overrightarrow{y_0} \\ \overrightarrow{IC} &= R_2 \overrightarrow{y_0}\end{aligned}$$



Contact ponctuel / RSG : ENGRENAGES

Engrenages à axes parallèles
Roues dentées avec contact extérieur

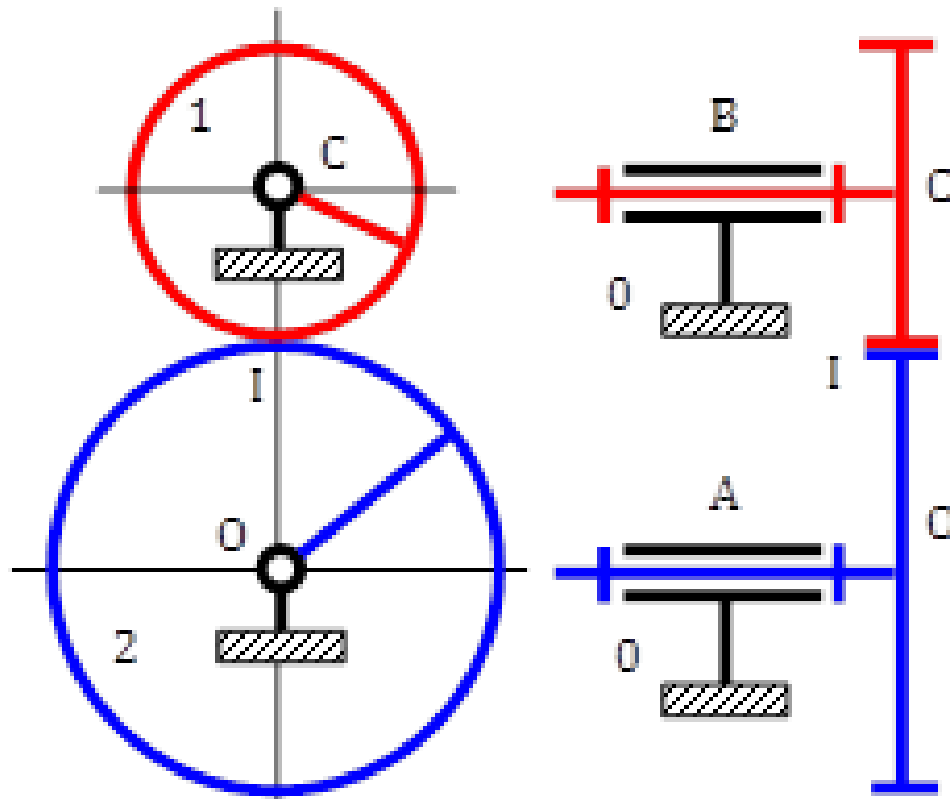


$$\frac{\omega_{20}}{\omega_{10}} = -\frac{R_1}{R_2} = -\frac{Z_1}{Z_2}$$

$$D = m \cdot Z$$

Contact ponctuel / RSG : ENGRENAGES

Engrenages à axes parallèles Roues dentées avec contact extérieur



- ✓ Transmission → mouvement de rotation entre des arbres à axes parallèles
- ✓ Plus simples
- ✓ Plus économiques

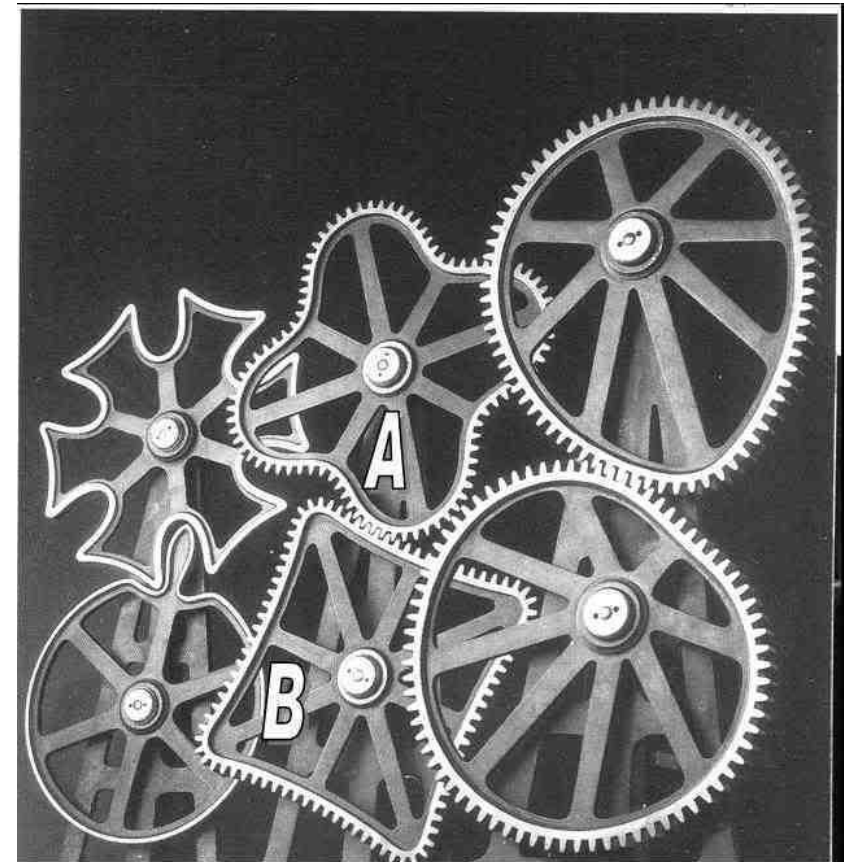
- Déplacements axiaux (dents parallèles aux axes de rotation)
- Bruyants

(Denture hélicoïdale)

- ✓ Engrènement plus progressif et plus continu
→ Silencieux + Effort transmis plus important
- Efforts axiaux

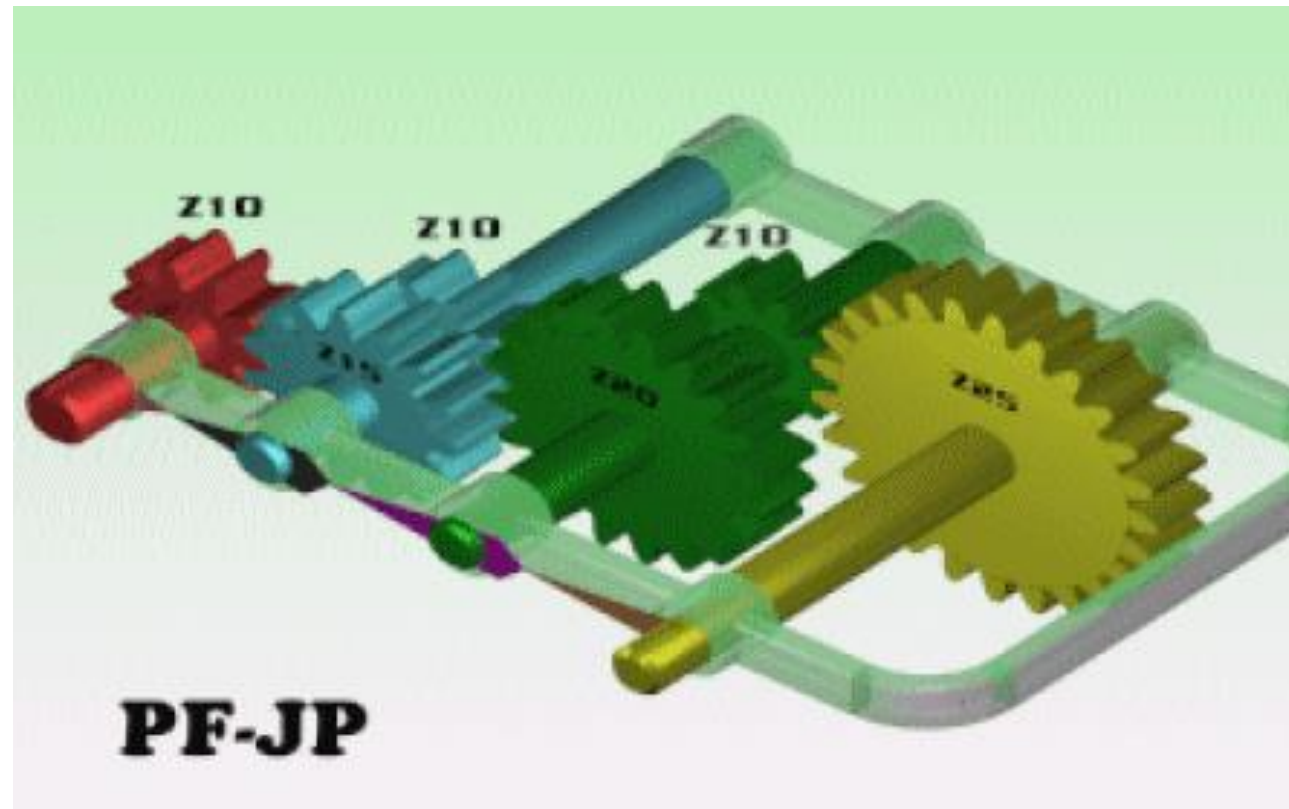
Contact ponctuel / RSG : ENGRENAGES

Engrenages à axes parallèles
Roues dentées avec contact extérieur



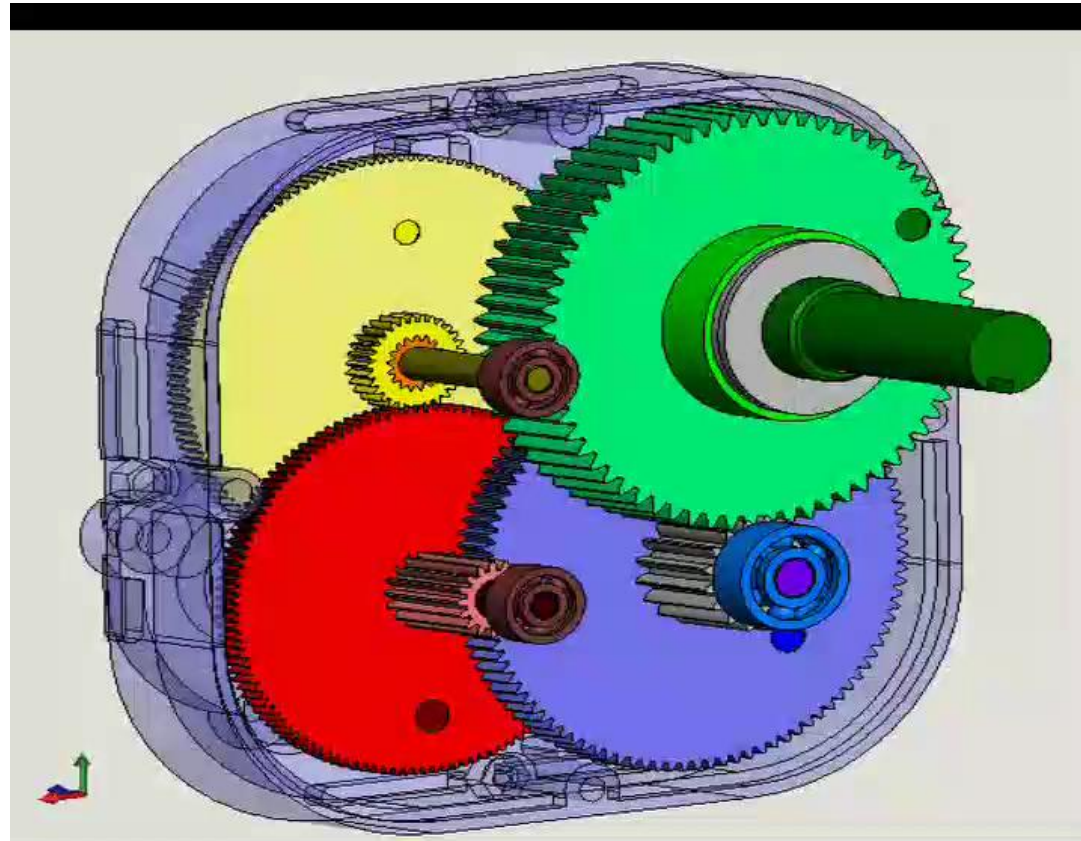
Contact ponctuel / RSG : ENGRENAGES

Engrenages à axes parallèles
Roues dentées avec contact extérieur



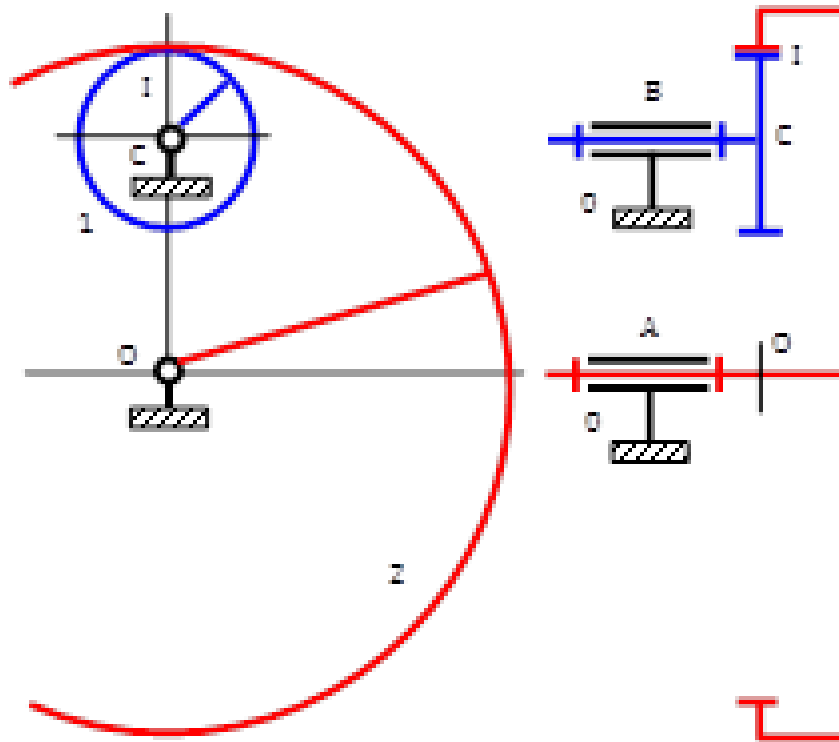
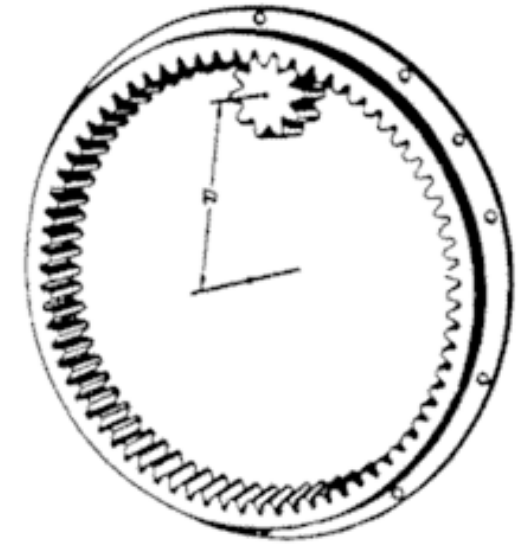
Contact ponctuel / RSG : ENGRENAGES

Engrenages à axes parallèles
Roues dentées avec contact extérieur

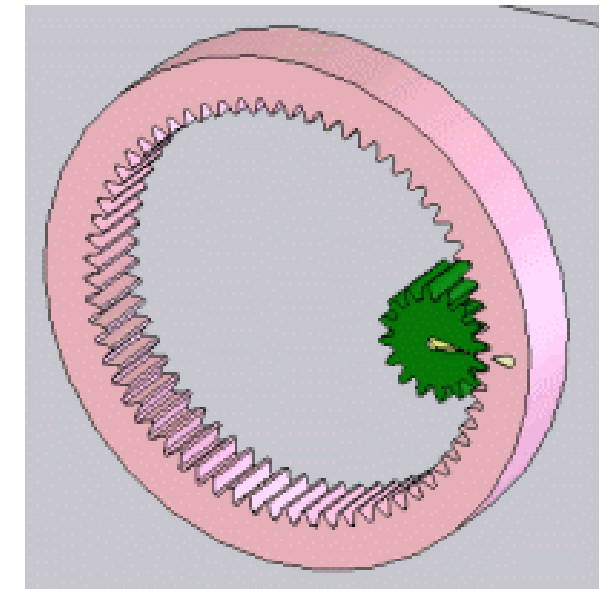


Contact ponctuel / RSG : ENGRENAGES

Engrenages à axes parallèles
Roues dentées avec contact intérieur

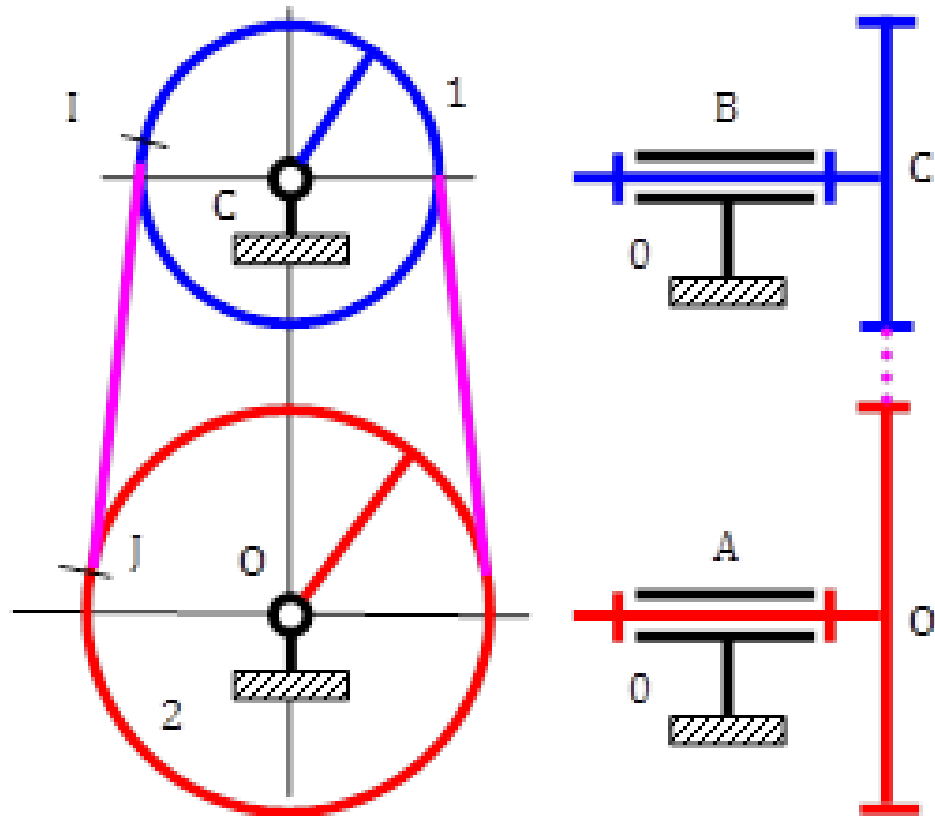


$$\frac{\omega_{20}}{\omega_{10}} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{Z_1}{Z_2}$$

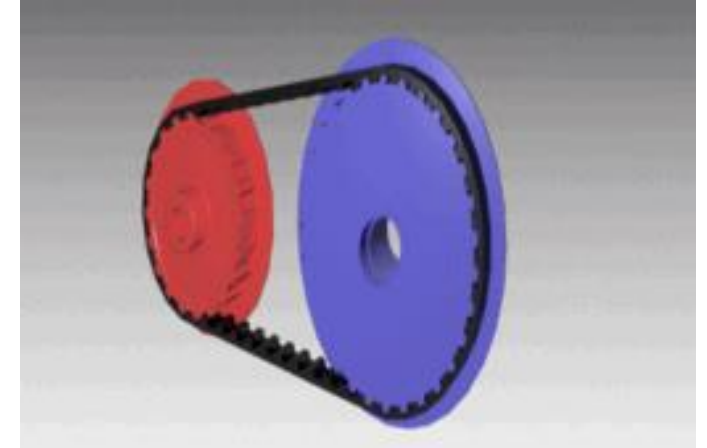
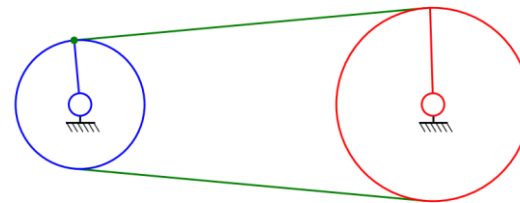


Contact ponctuel / RSG : ENGRENAGES

Engrenages à axes parallèles
Poulie courroie

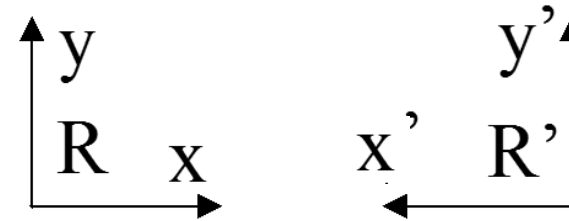
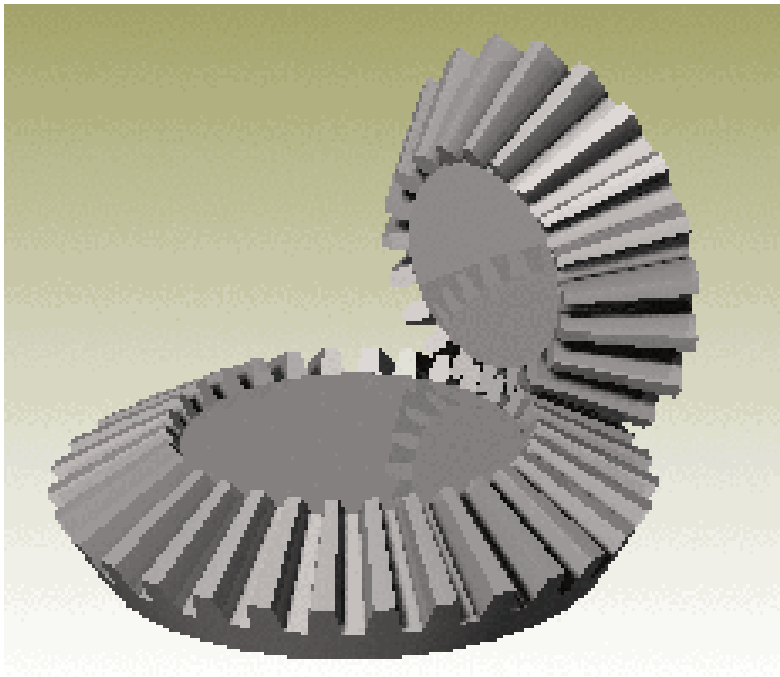


$$\frac{\omega_{20}}{\omega_{10}} = \frac{R_1}{R_2}$$



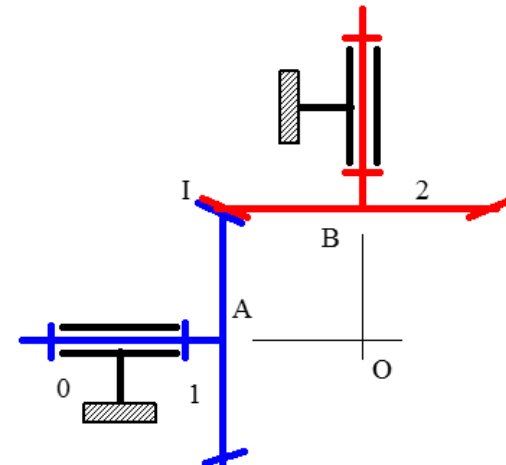
Contact ponctuel / RSG : ENGRENAGES

Engrenages à axes non parallèles
Roues dentées avec contact extérieur



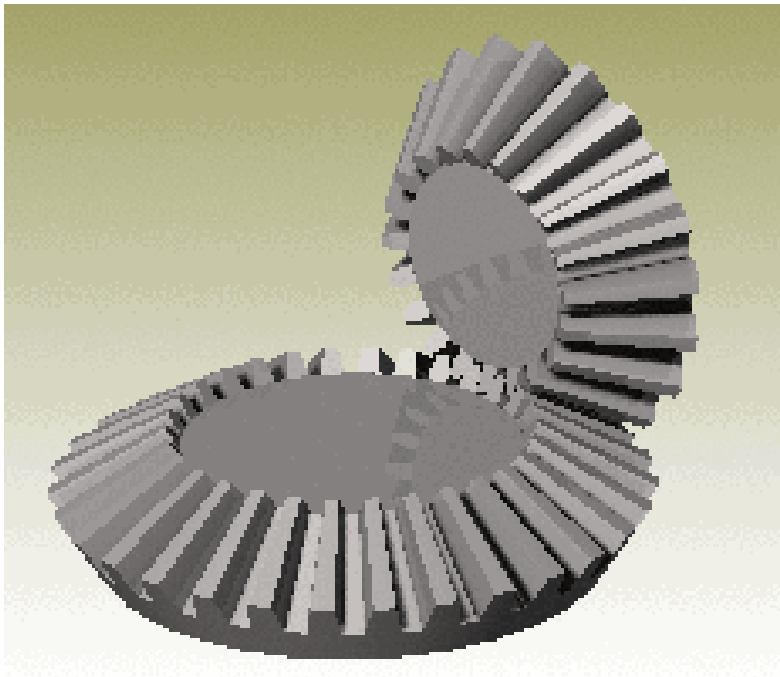
$$\frac{\omega_{20}}{\omega_{10}} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{Z_1}{Z_2}$$

$$\frac{\omega'_{20}}{\omega'_{10}} = -\frac{R_1}{R_2} = -\frac{Z_1}{Z_2}$$



Contact ponctuel / RSG : ENGRENAGES

Engrenages à axes non parallèles
Roues dentées avec contact extérieur



- ✓ Transmission de mouvement de rotation entre des arbres à axes concourants perpendiculaires ou non.
- Arbres sont en porte à faux
- Efforts axiaux
- Sommets des cônes doivent coïncider

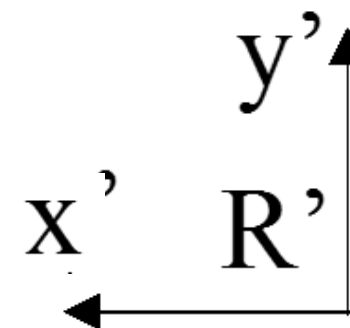
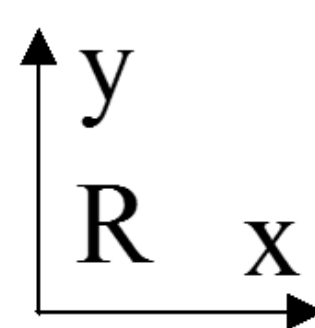
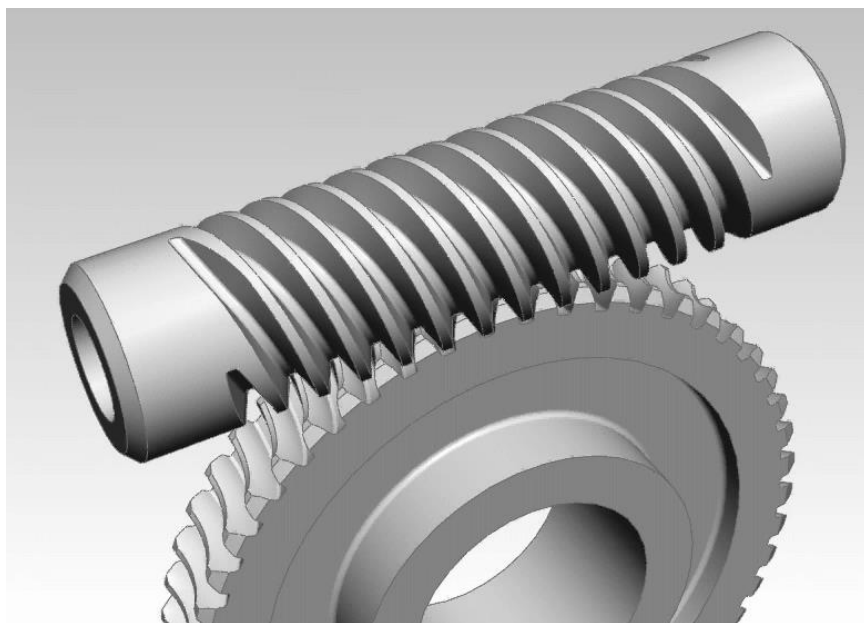
Contact ponctuel / RSG : ENGRENAGES

Engrenages à axes non parallèles

Roue/vis

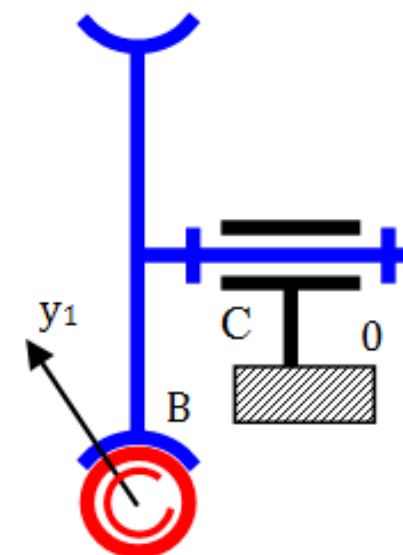
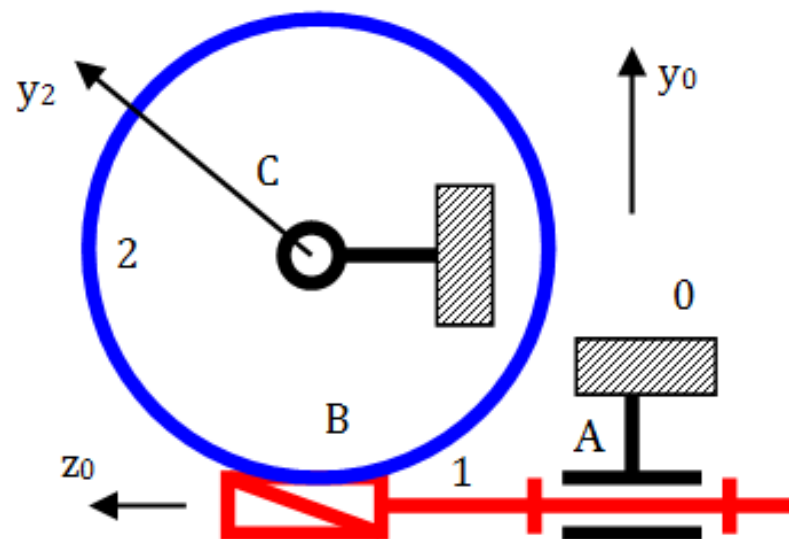
Vis 1 : Z_1 filets

Roue 2 : Z_2 dents



$$\frac{\omega_{20}}{\omega_{10}} = -\frac{Z_1}{Z_2}$$

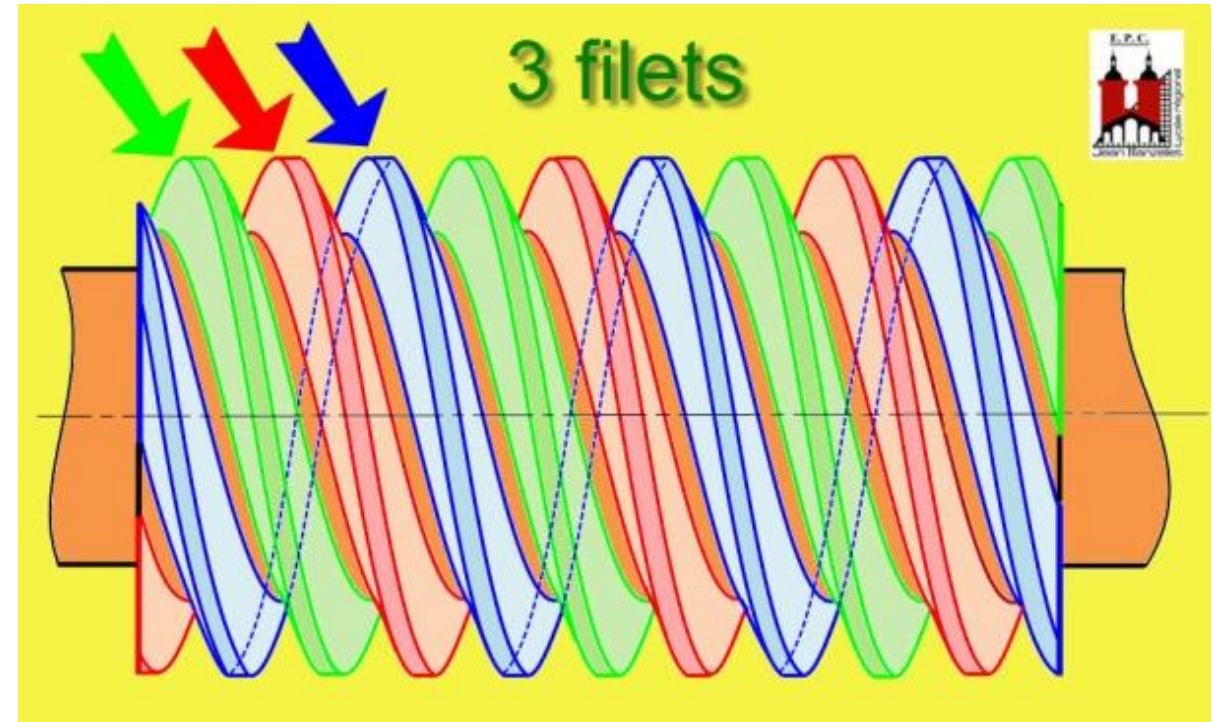
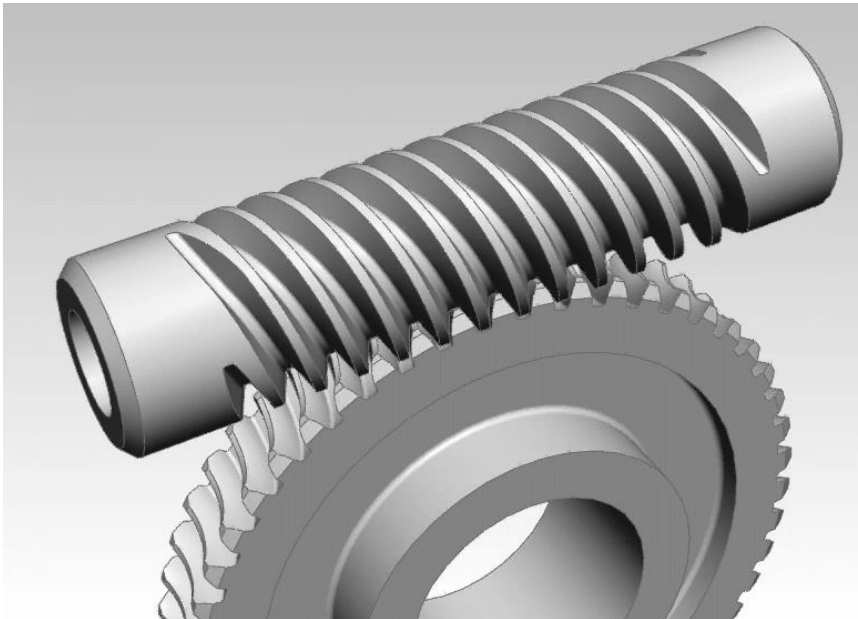
$$\frac{\omega'_{20}}{\omega'_{10}} = \frac{Z_1}{Z_2}$$



ATTENTION : Pas de rapport de rayon

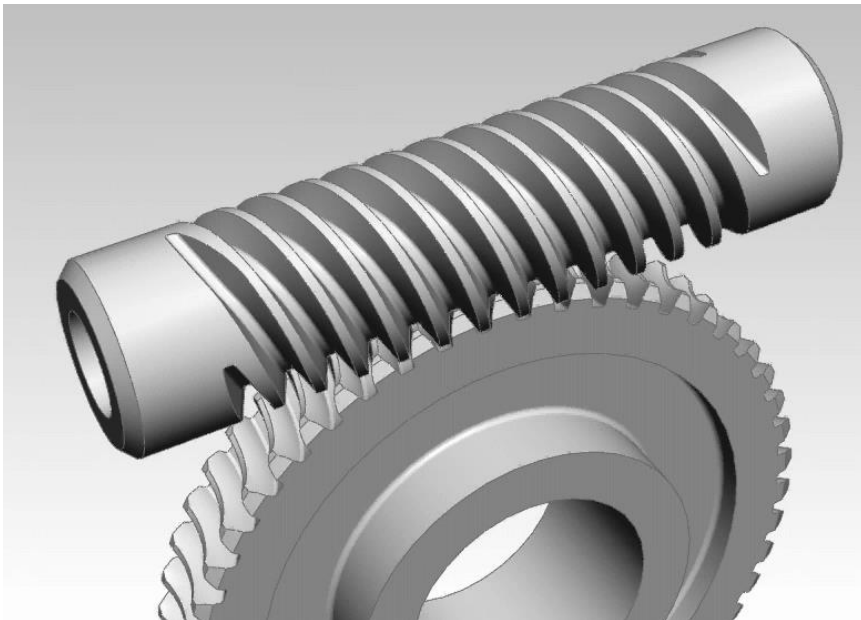
Contact ponctuel / RSG : ENGRENAGES

Engrenages à axes non parallèles
Roue/vis



Contact ponctuel / RSG : ENGRENAGES

Engrenages à axes non parallèles Roue/vis

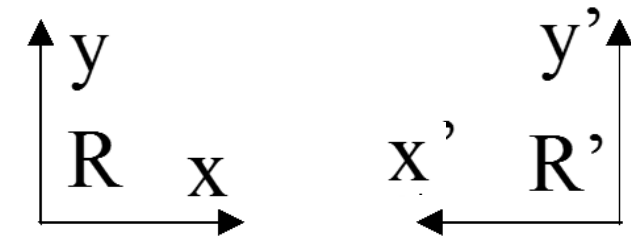
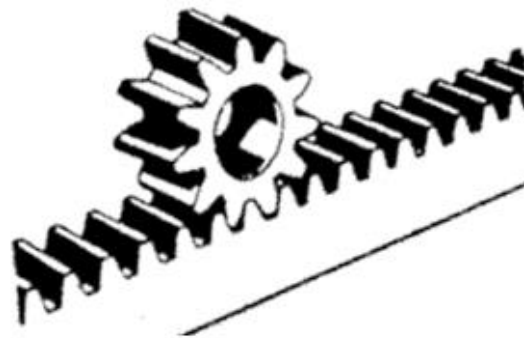
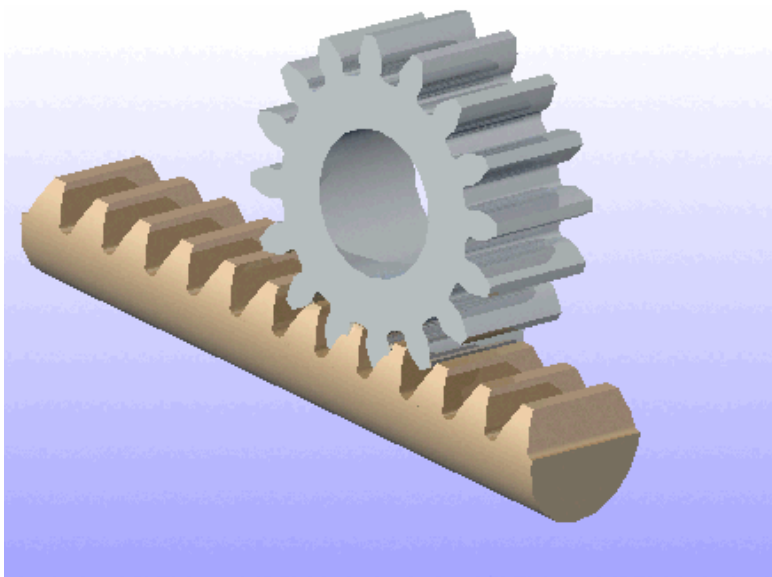


- ✓ Transmission entre arbres à axes non concourants
- ✓ Irréversibilité possible → sécurité anti-retour
- ✓ Grand rapport de réduction (entre 5 et 150)

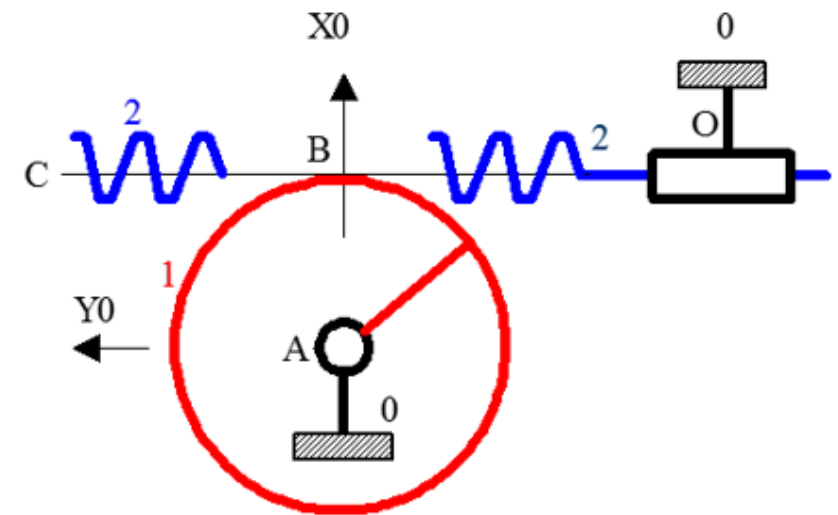
- Beaucoup de glissement entre les dentures → usure
- Rendement faible (60%)
- Vis → supporte un effort axial important

Contact ponctuel / RSG : ENGRENAGES

Engrenages à axes non parallèles
Pignon crémaillère



$$V_{20} = -R_1 \cdot \omega_{10} \quad V'_{20} = R_1 \cdot \omega'_{10}$$



ATTENTION : Pas de rapport de nombre de dents !!

Contact ponctuel / RSG : ENGRENAGES

Trains épicycloïdaux

Trains simples :

- Arbres d'entrée et de sortie → ~~coaxiaux~~
- Rapport de réduction ou multiplication d'un seul couple de roues dentées → limité à 7 (raisons de géométrie).
- Trains simples à plusieurs étages → encombrants et lourds

Engrenages à roue et vis sans fin :

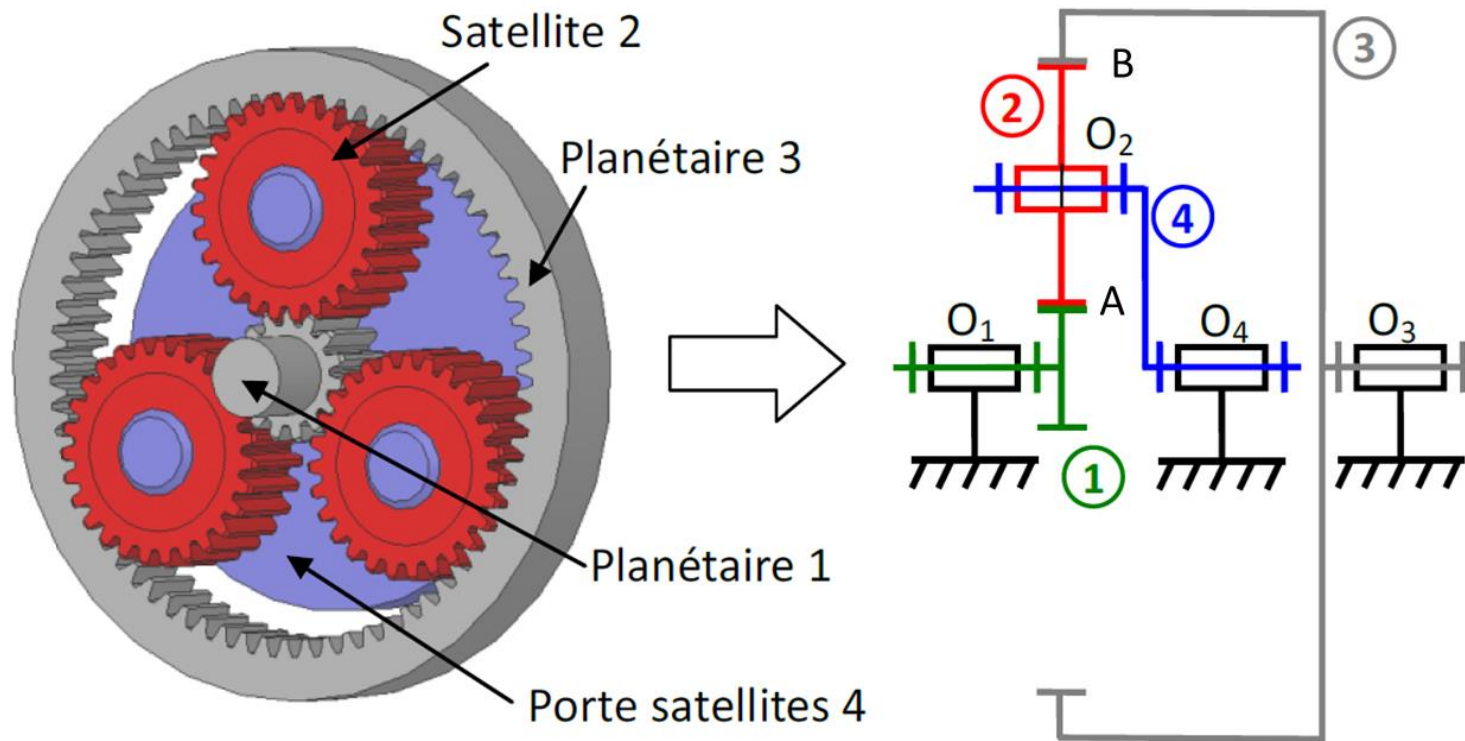
- Arbres d'entrée et de sortie → ~~coaxiaux~~
- Rapport de réduction ou multiplication → 150
- rendement $\leq 60 \%$

Trains épicycloïdaux :

- ✓ Arbre d'entrée et de sortie coaxiaux
- ✓ Rapport de réduction ou multiplication → élevé + encombrement faible
- ✓ 3 entrées/sorties possibles, selon les cas de fonctionnement

Contact ponctuel / RSG : ENGRENAGES

Trains épicycloïdaux



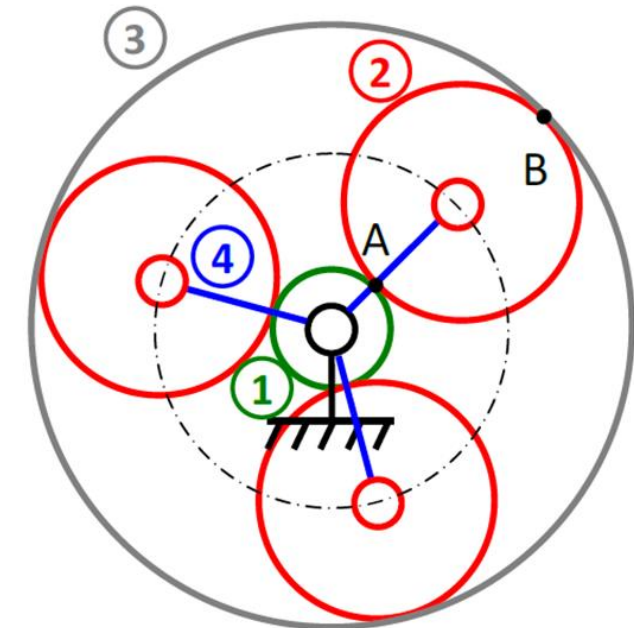
Planétaire 1 : $Z_1 ; R_1$

Satellite 2 : $Z_2 ; R_2$

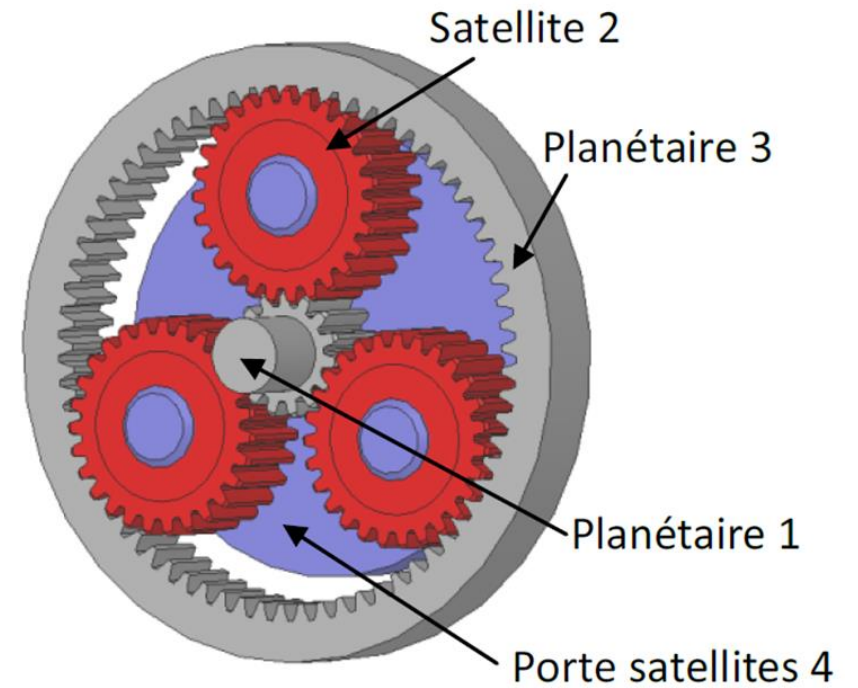
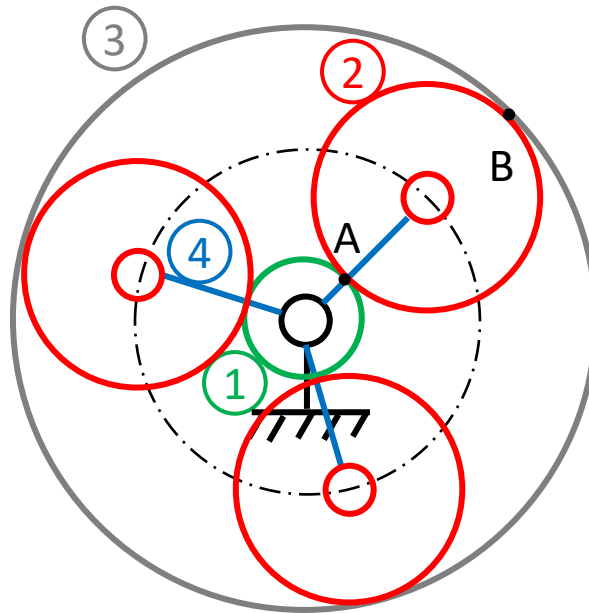
Couronne (planétaire) 3 : $Z_3 ; R_3$

Porte satellites : 4

Bâti : 0 (on a souvent 3 = 0)



Remarque importante : L'utilisation de plusieurs satellites ne change rien à la cinématique du système → supprime les efforts radiaux sur les arbres + réduit les efforts sur chaque denture.

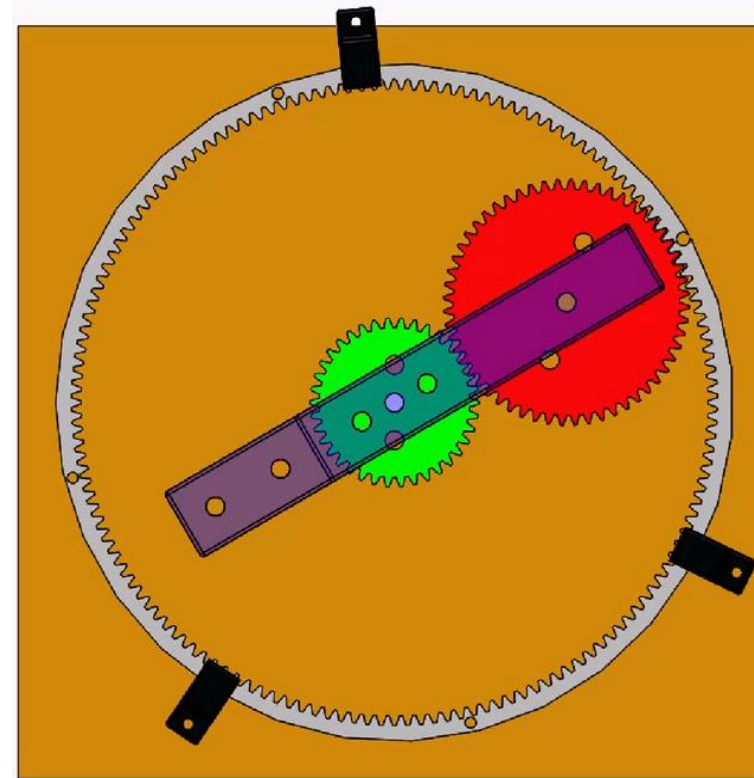
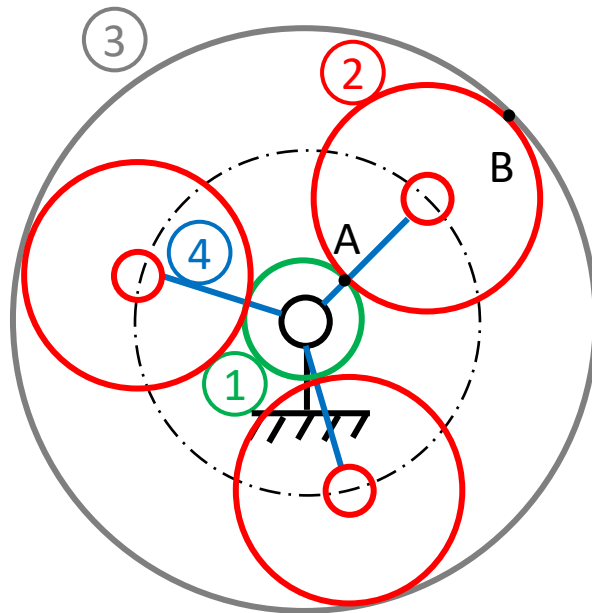
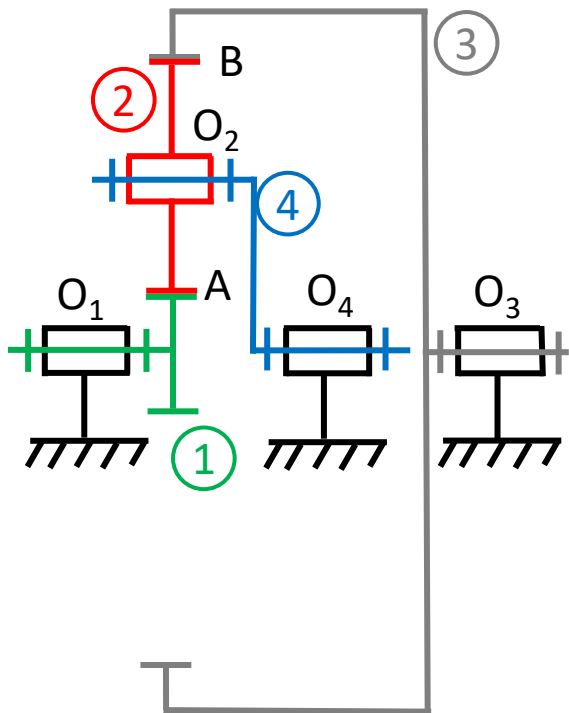


Satellite 2 : Z_2 ; R_2

Couronne (planétaire) 3 : Z_3 ; R_3

Porte satellites : 4

Bâti : 0



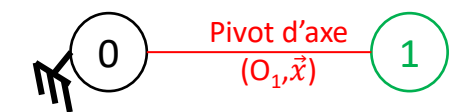
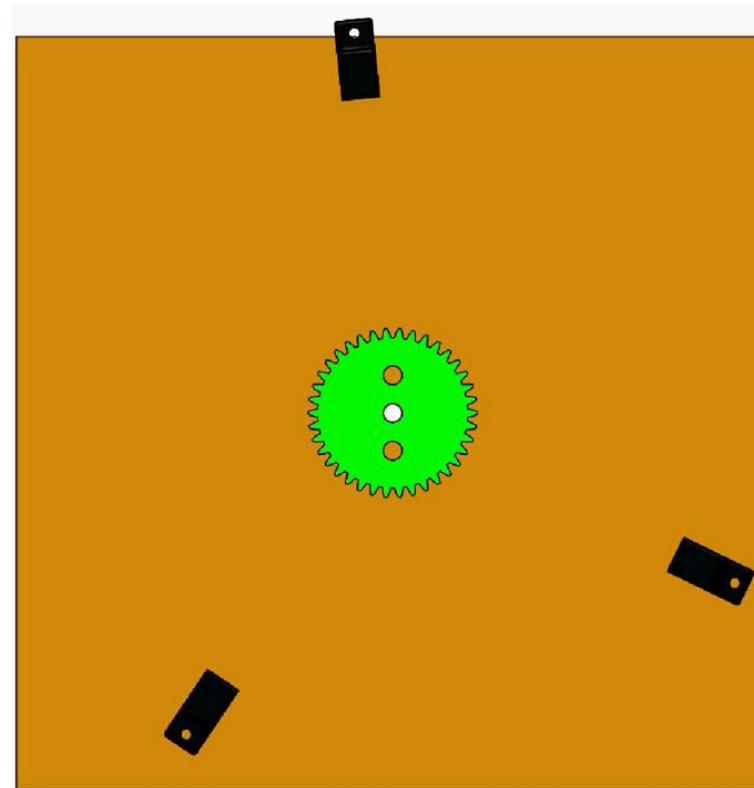
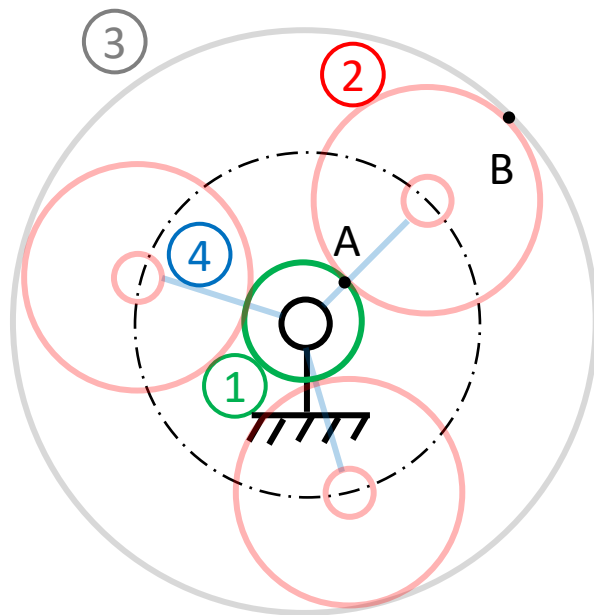
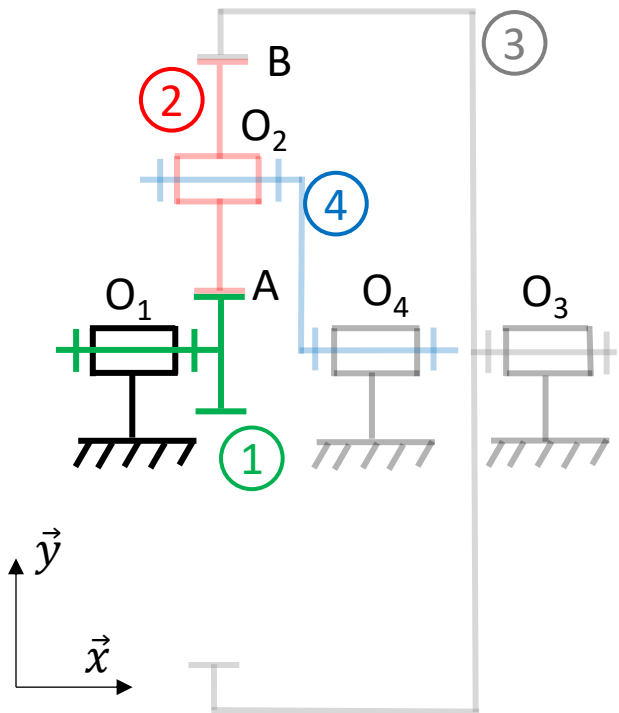
Planétaire 1 : Z_1 ; R_1

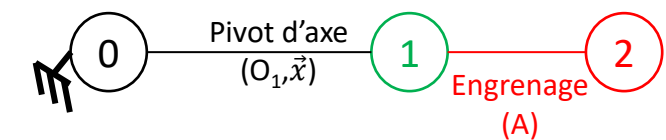
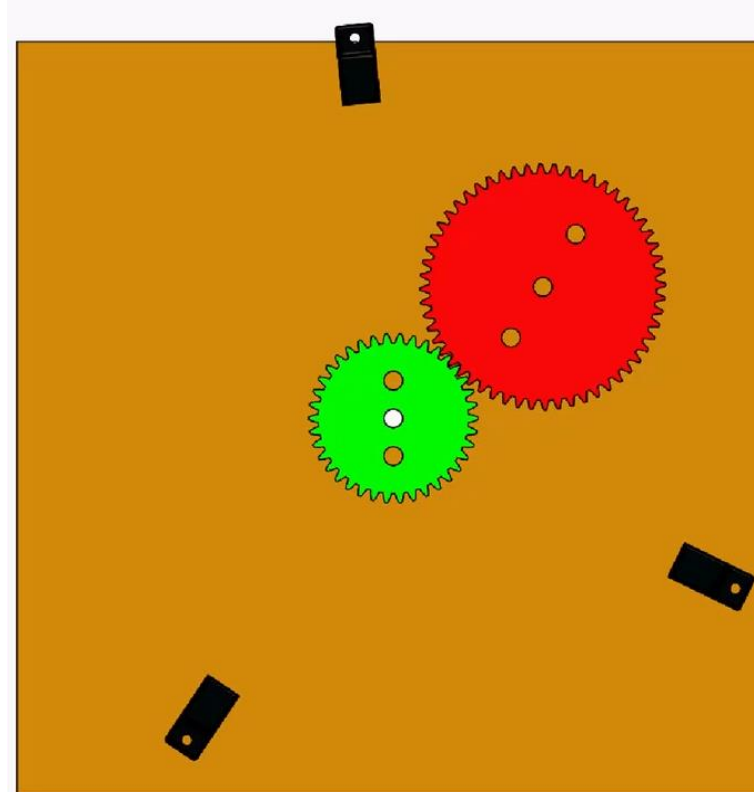
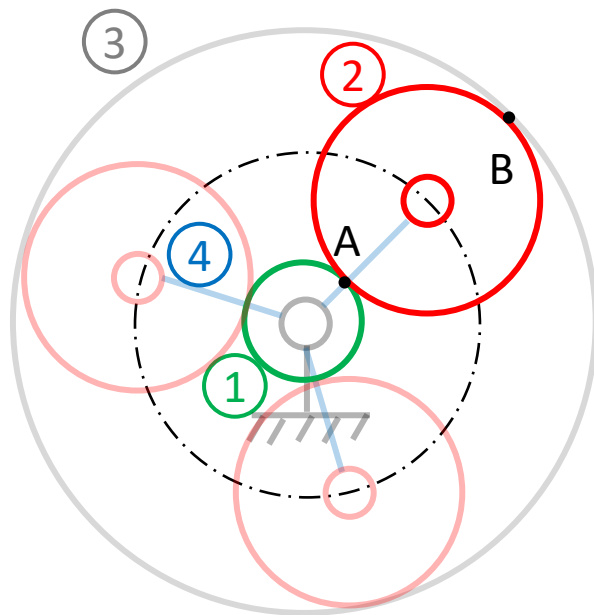
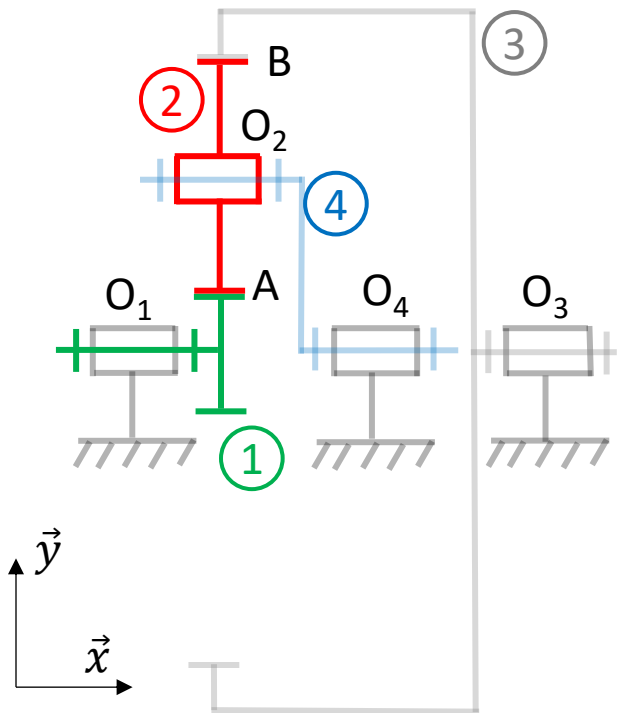
Satellite 2 : Z_2 ; R_2

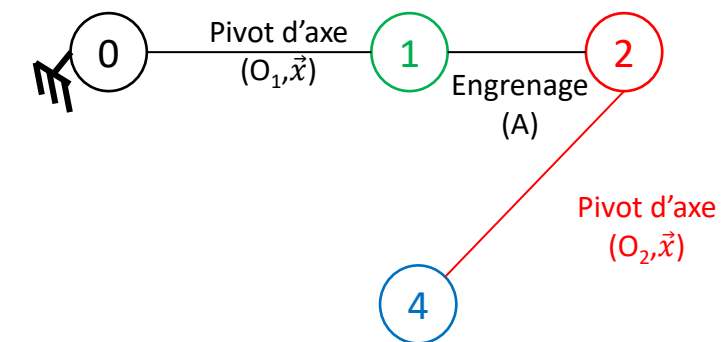
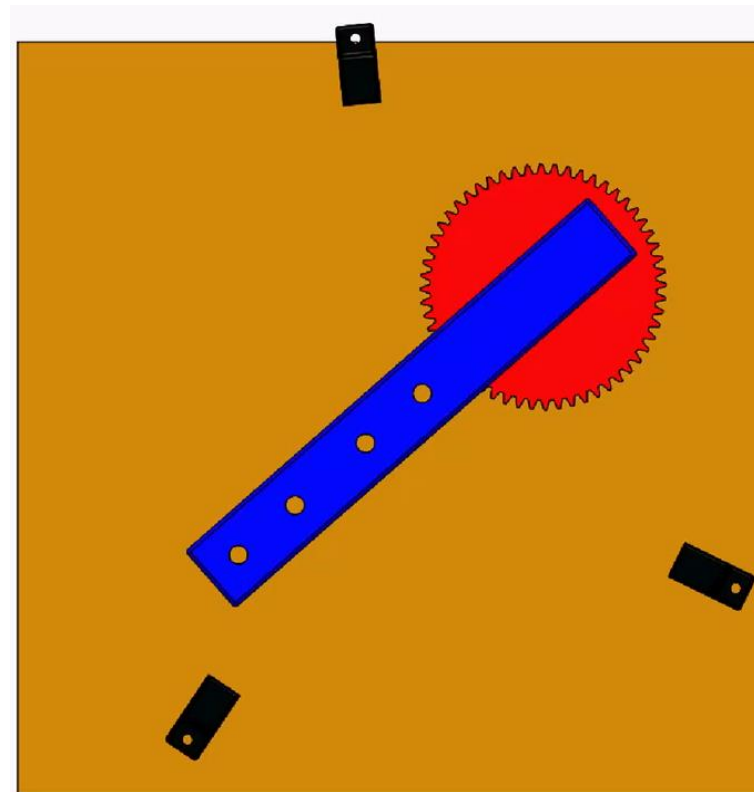
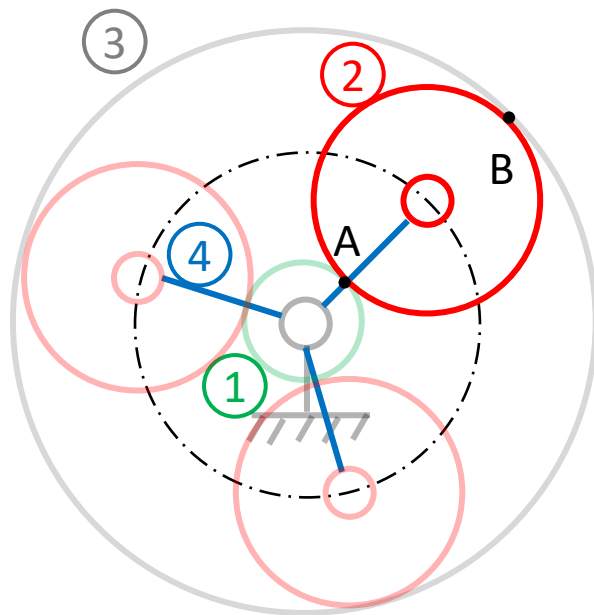
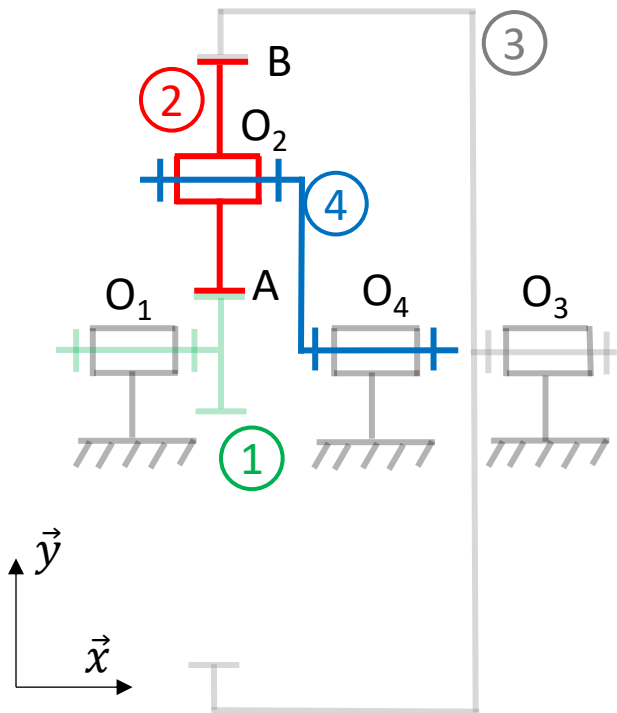
Couronne (planétaire) 3 : Z_3 ; R_3

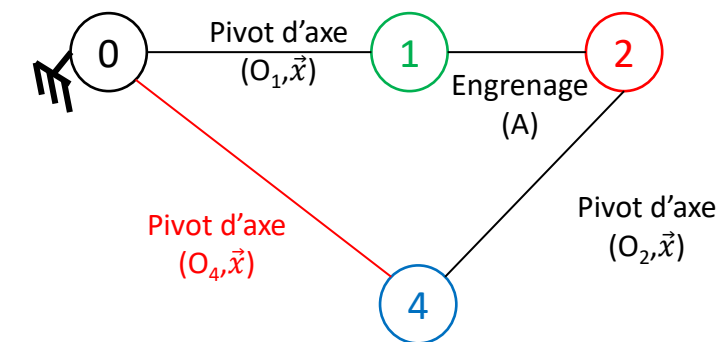
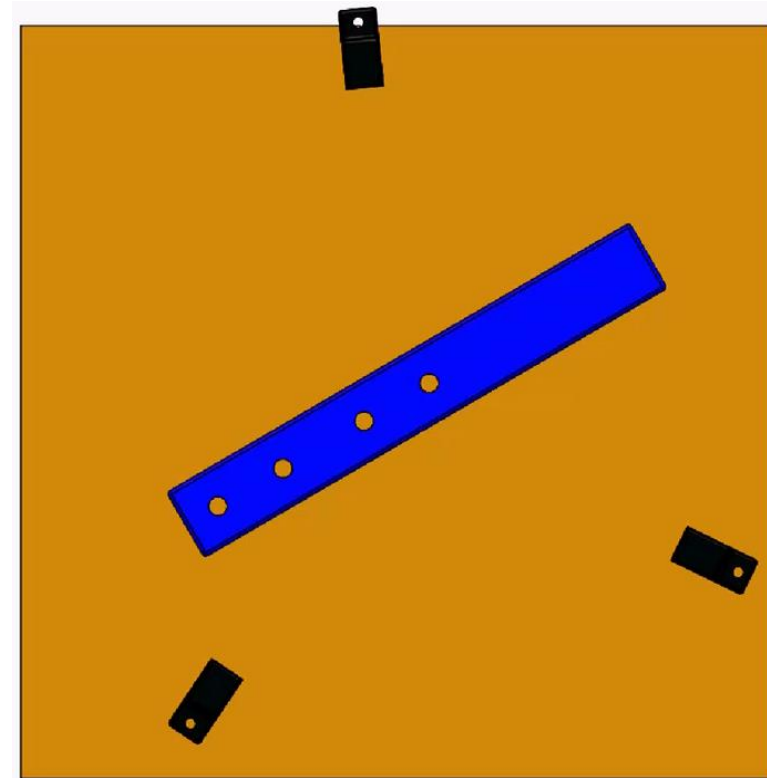
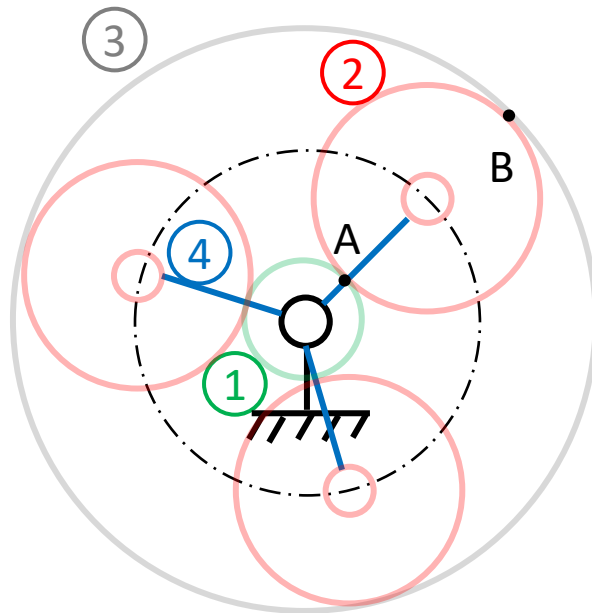
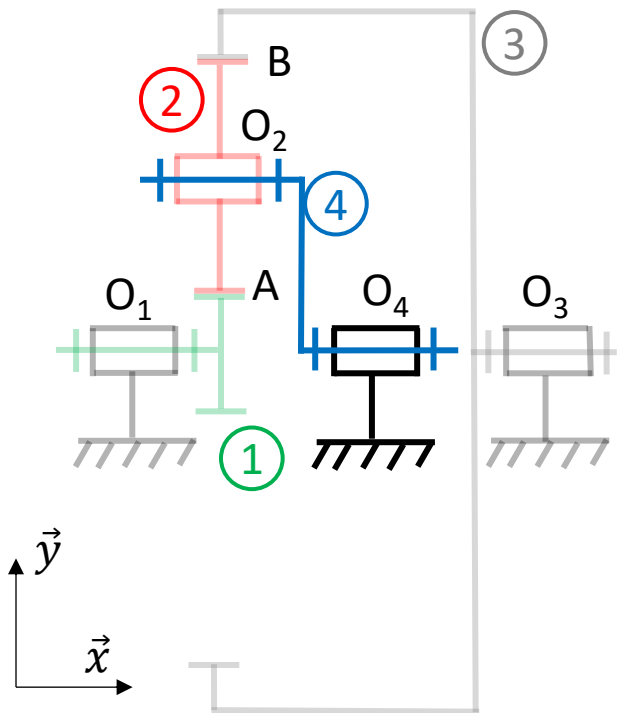
Porte satellites : 4

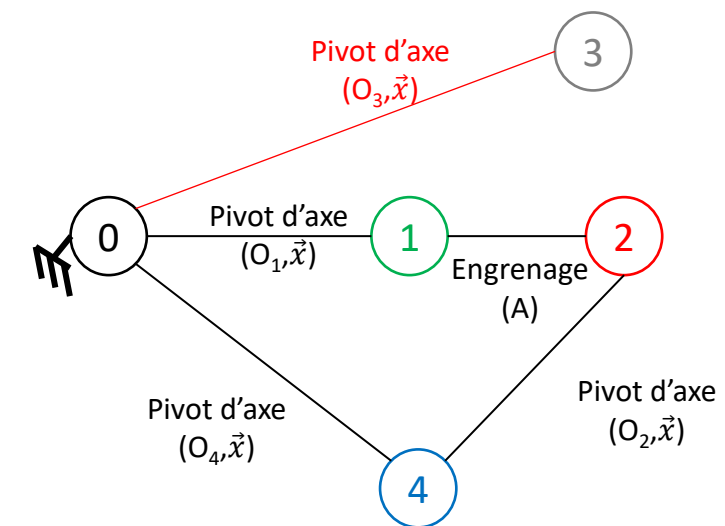
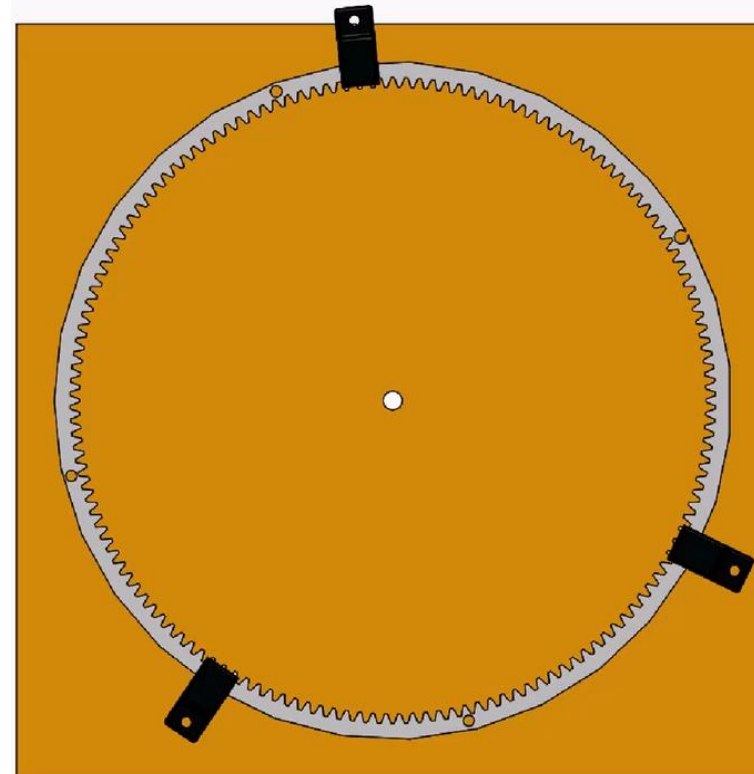
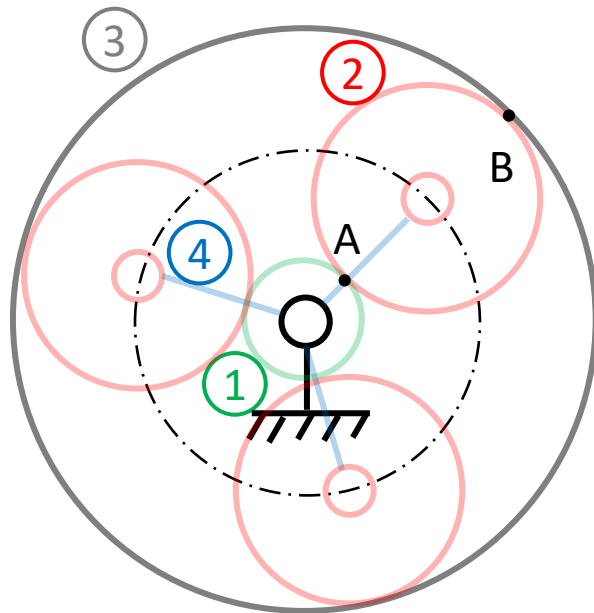
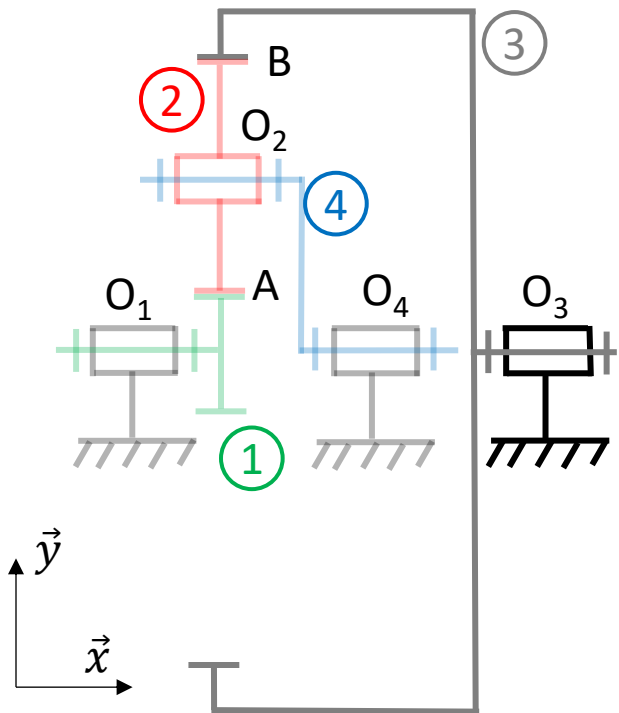
Bâti : 0

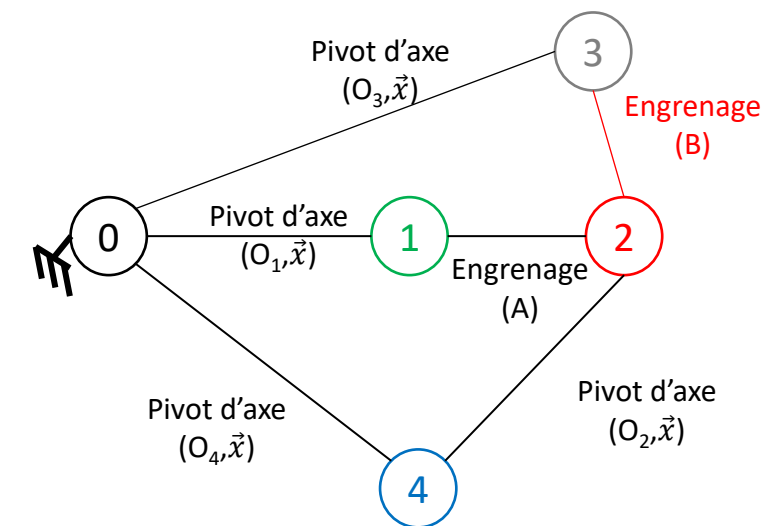
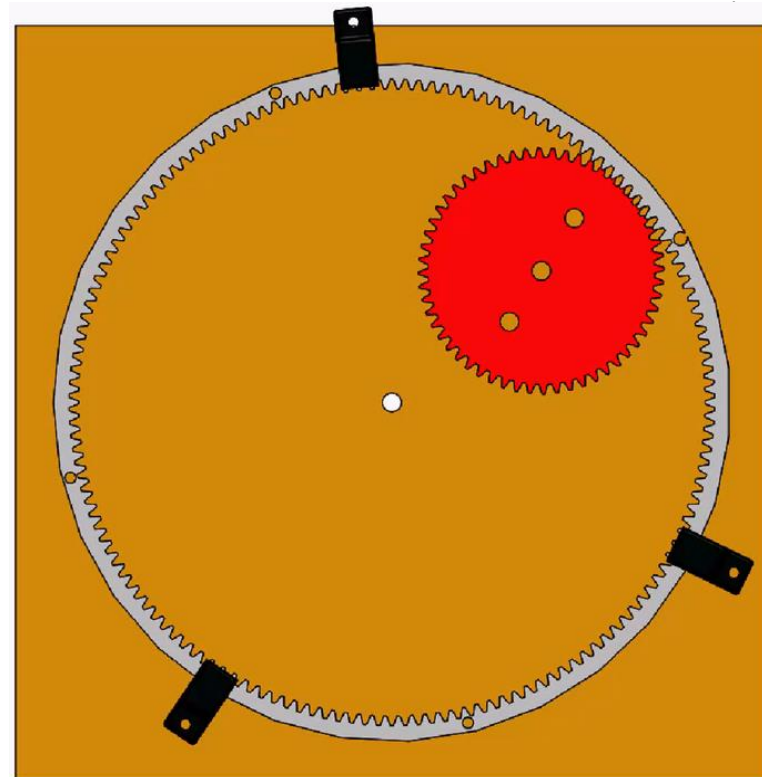
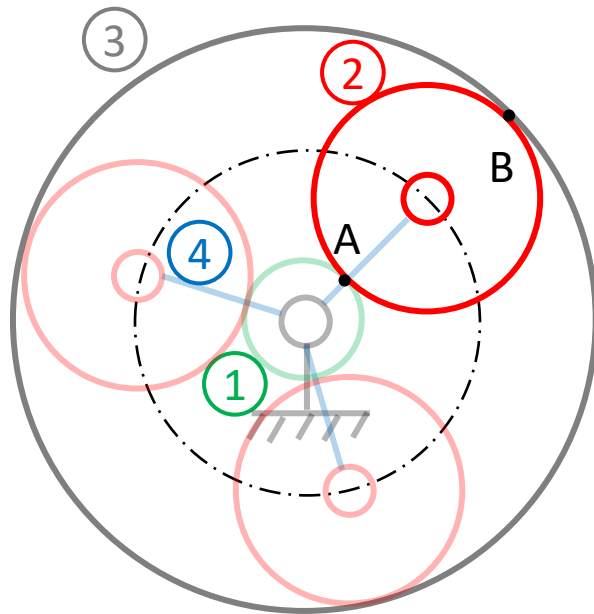
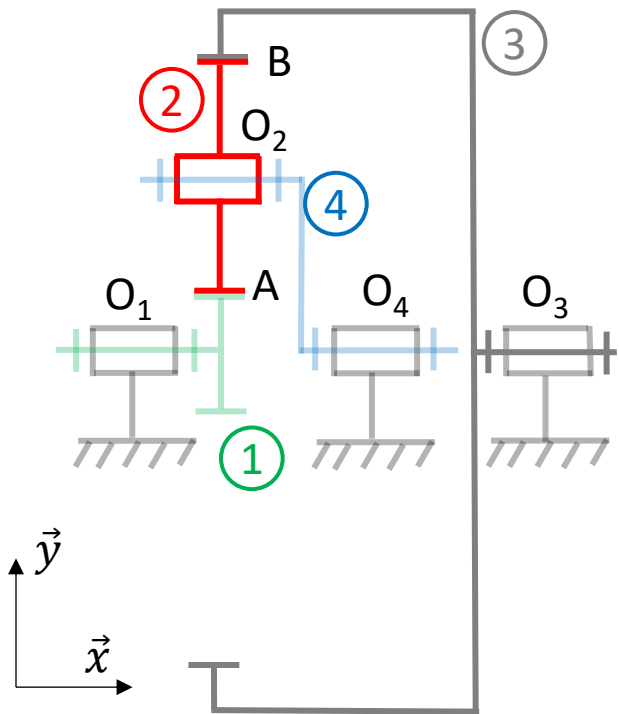


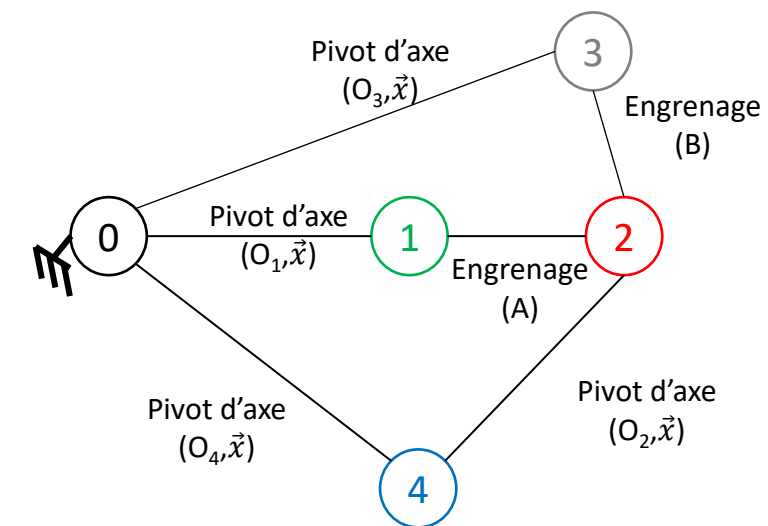
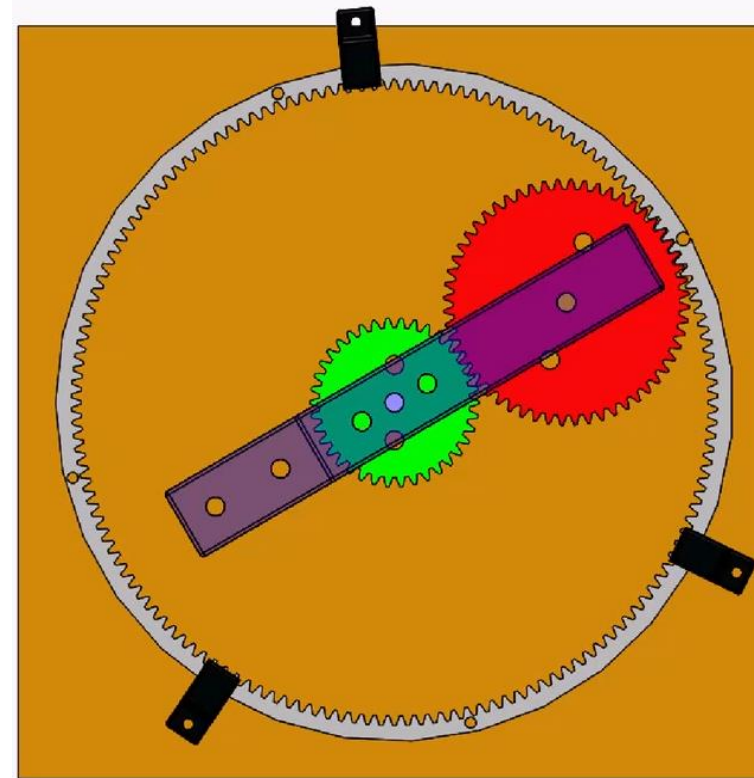
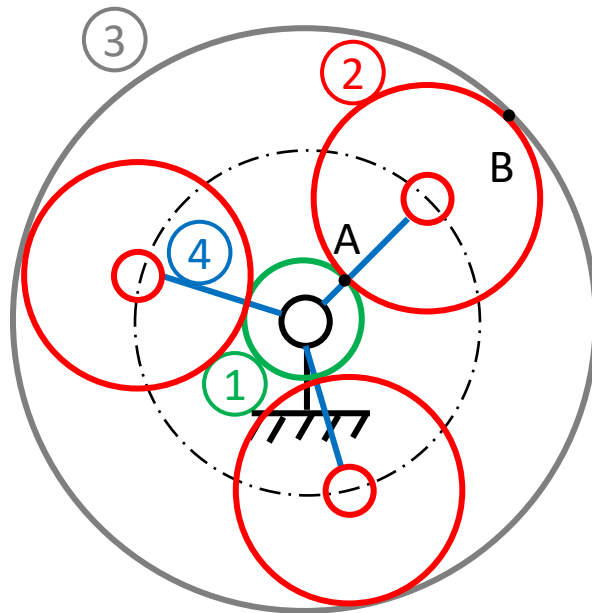
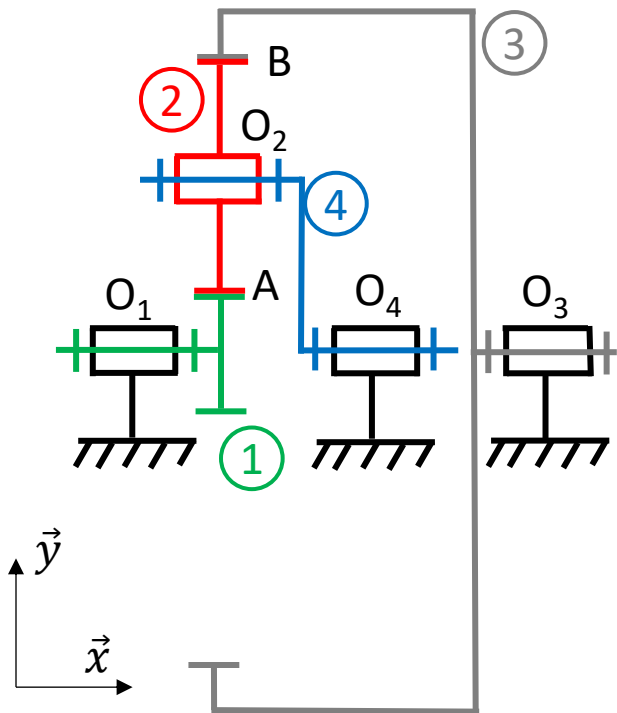


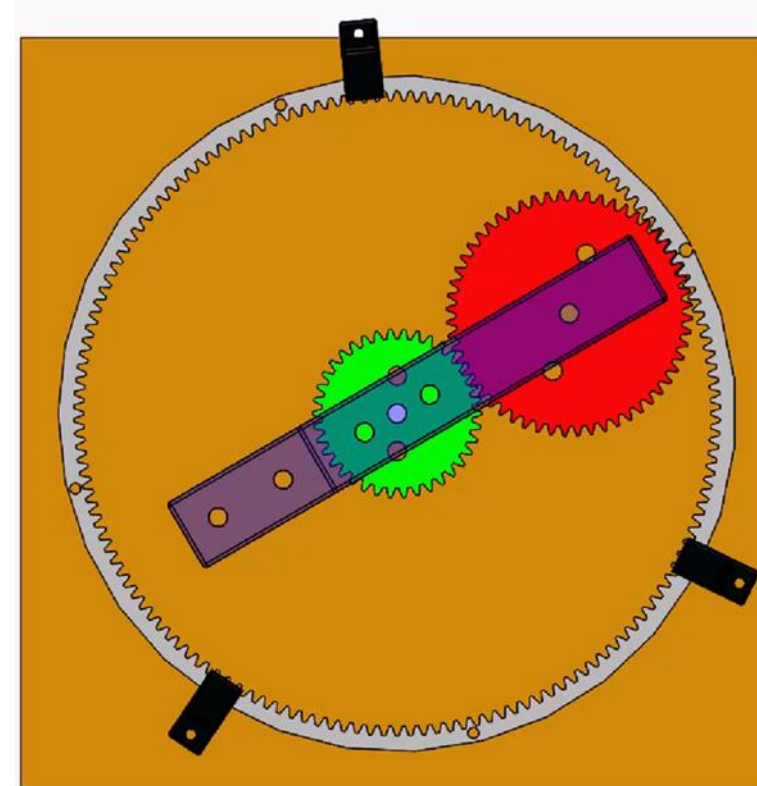
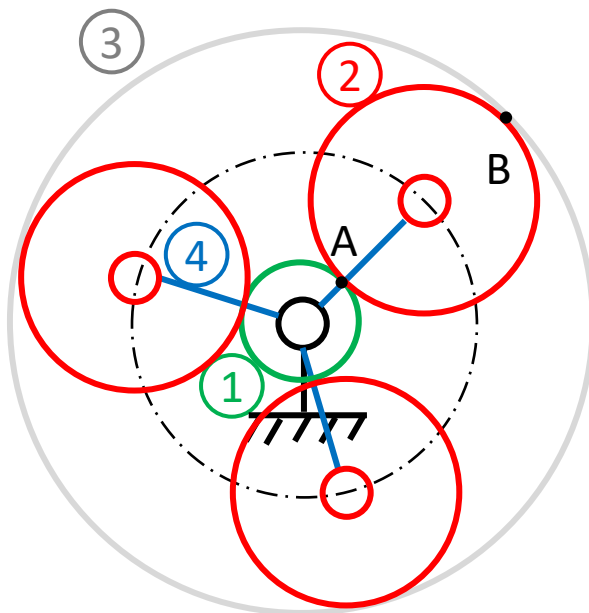
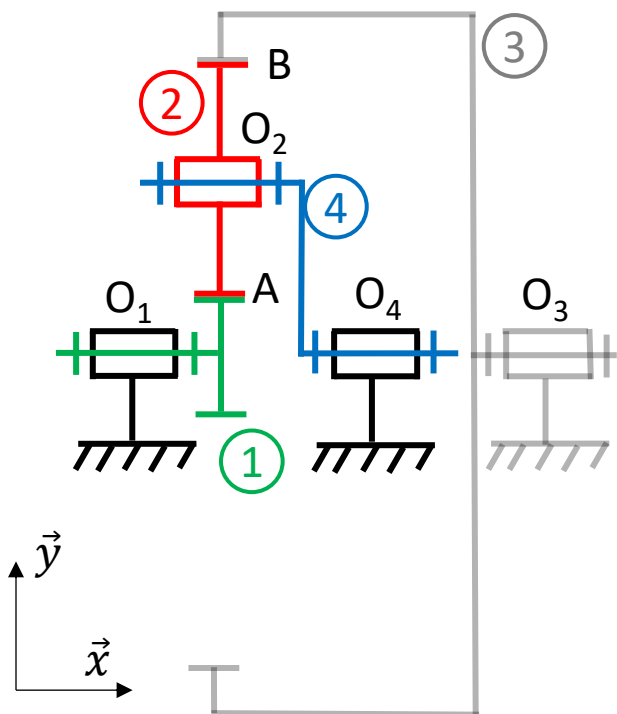












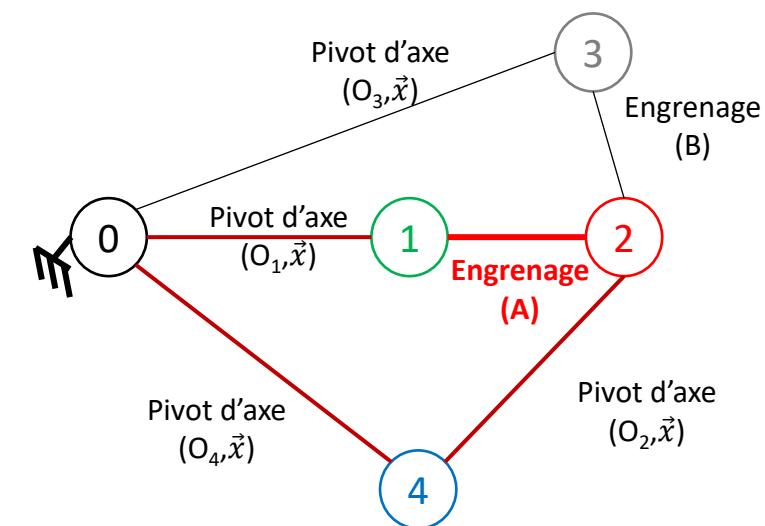
RSG en A entre 2 et 1 :

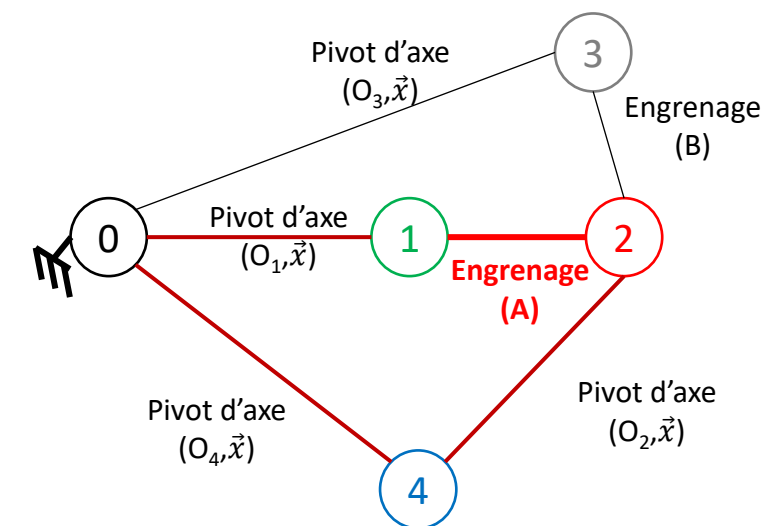
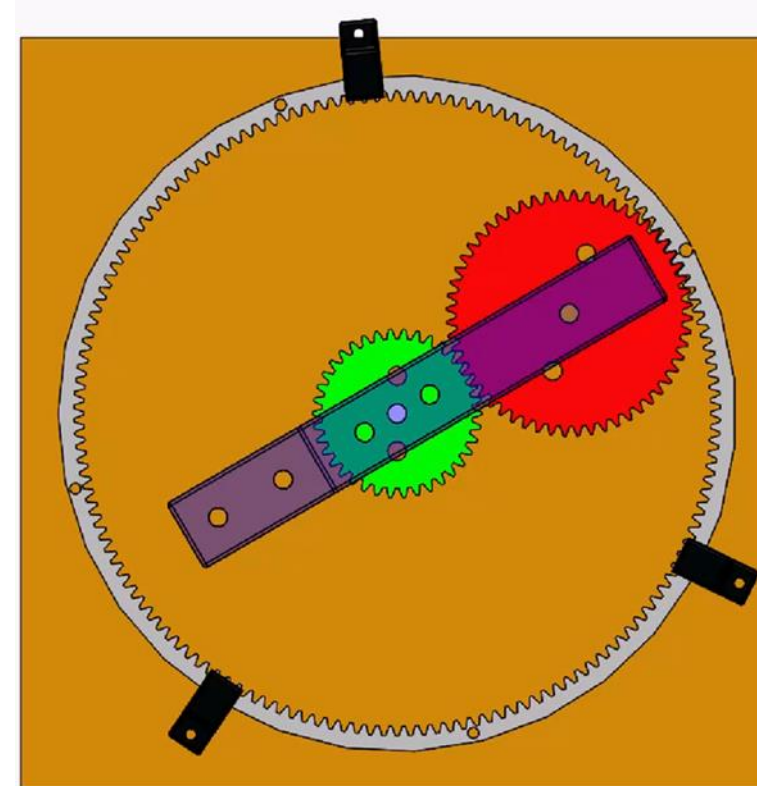
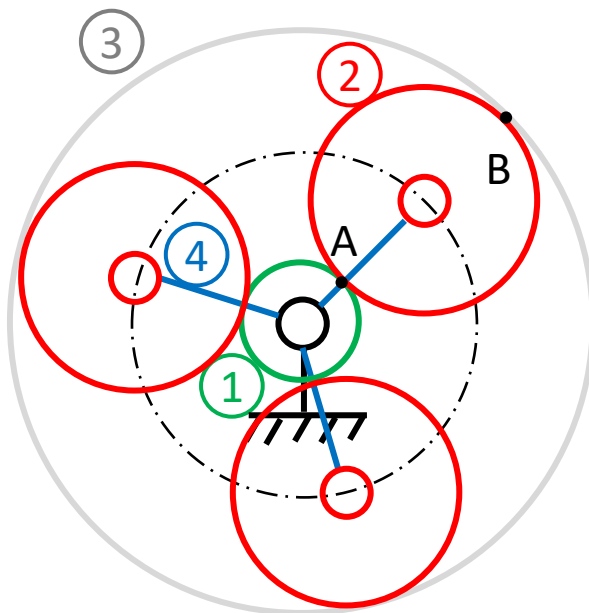
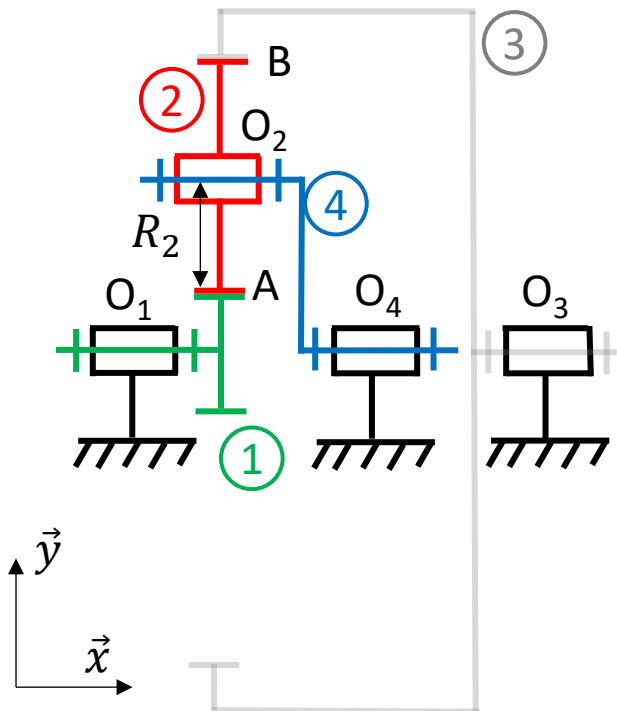
$$\overrightarrow{V(A \in 2/1)} = \vec{0} \quad \text{Or } \overrightarrow{V(A \in 2/1)} = \overrightarrow{V(A \in 2/0)} + \overrightarrow{V(A \in 0/1)} = \vec{0}$$

$$\text{Donc } \overrightarrow{V(A \in 2/0)} = \overrightarrow{V(A \in 1/0)}$$

$$\text{Or } \overrightarrow{V(A \in 2/0)} = \overrightarrow{V(A \in 2/4)} + \overrightarrow{V(A \in 4/0)}$$

$$\text{Donc } \overrightarrow{V(A \in 2/4)} + \overrightarrow{V(A \in 4/0)} = \overrightarrow{V(A \in 1/0)}$$





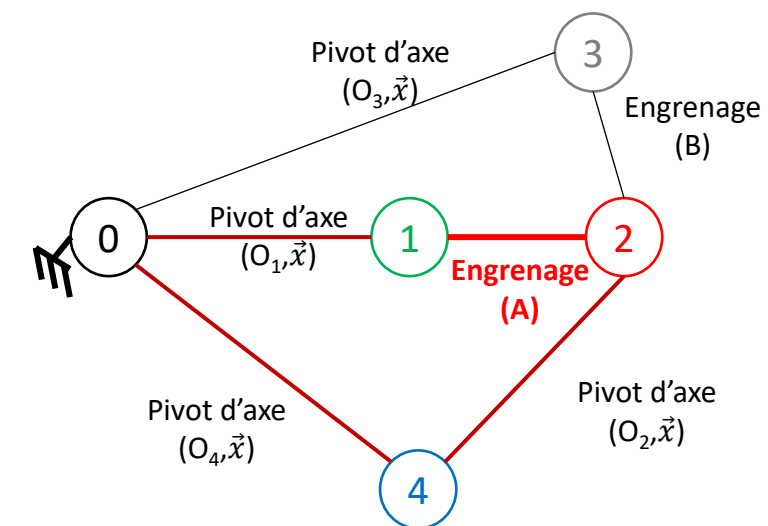
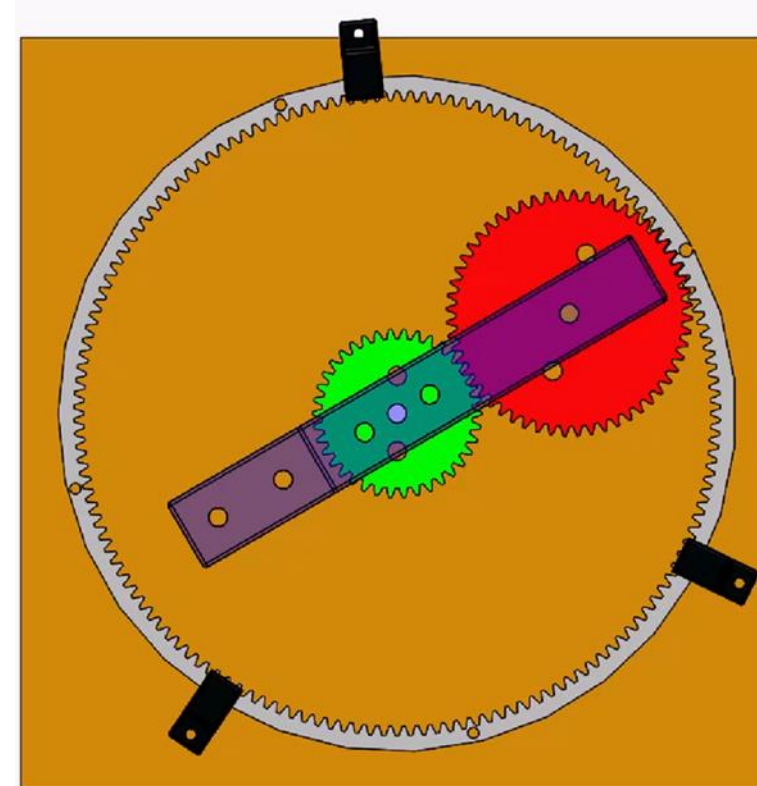
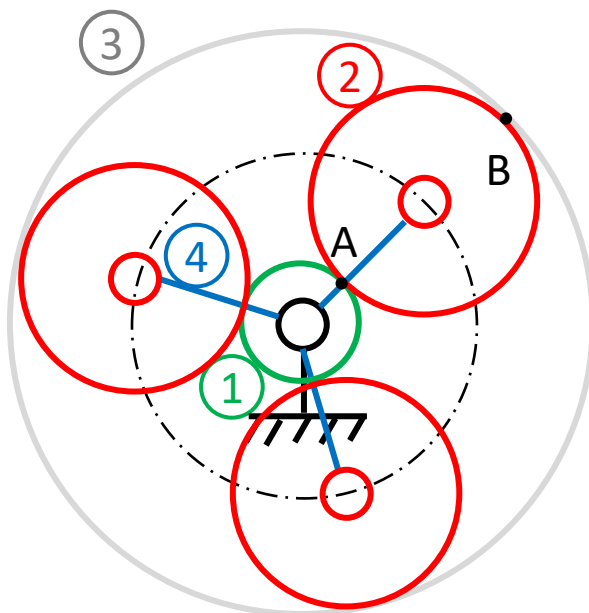
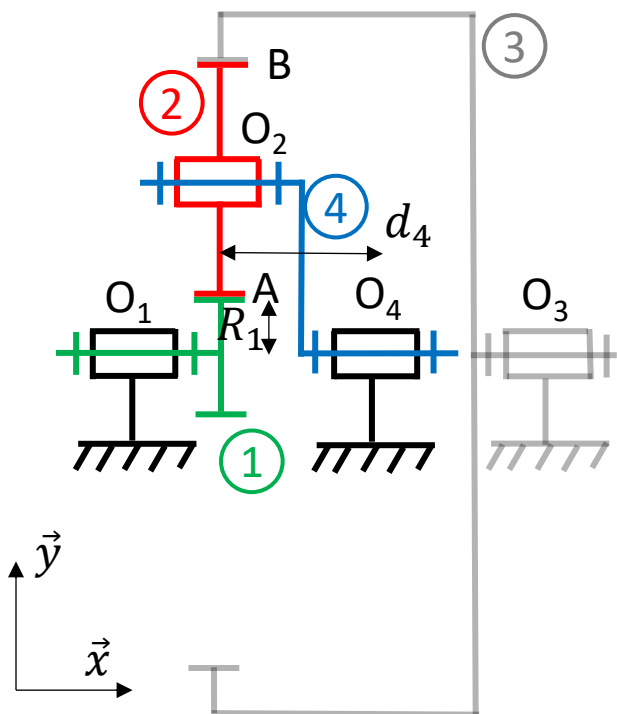
RSG en A entre 2 et 1 :

$$\overrightarrow{V(A \in 2/4)} = \overrightarrow{V(O_2 \in 2/4)} + \overrightarrow{AO_2} \wedge \overrightarrow{\Omega_{24}}$$

$$\overrightarrow{V(A \in 2/4)} = \vec{0} + R_2 \cdot \vec{y} \wedge \omega_{24} \vec{x} = -R_2 \cdot \omega_{24} \vec{z}$$

$$\overrightarrow{V(A \in 2/4)} + \overrightarrow{V(A \in 4/0)} = \overrightarrow{V(A \in 1/0)}$$

BABAR au point O_2



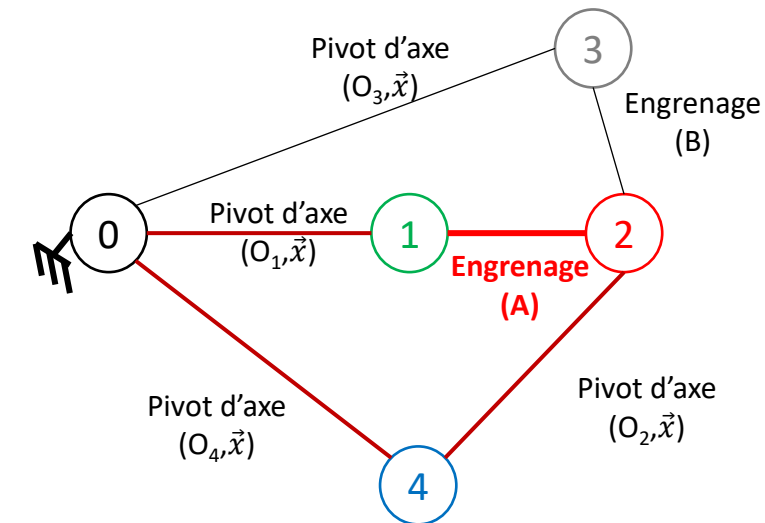
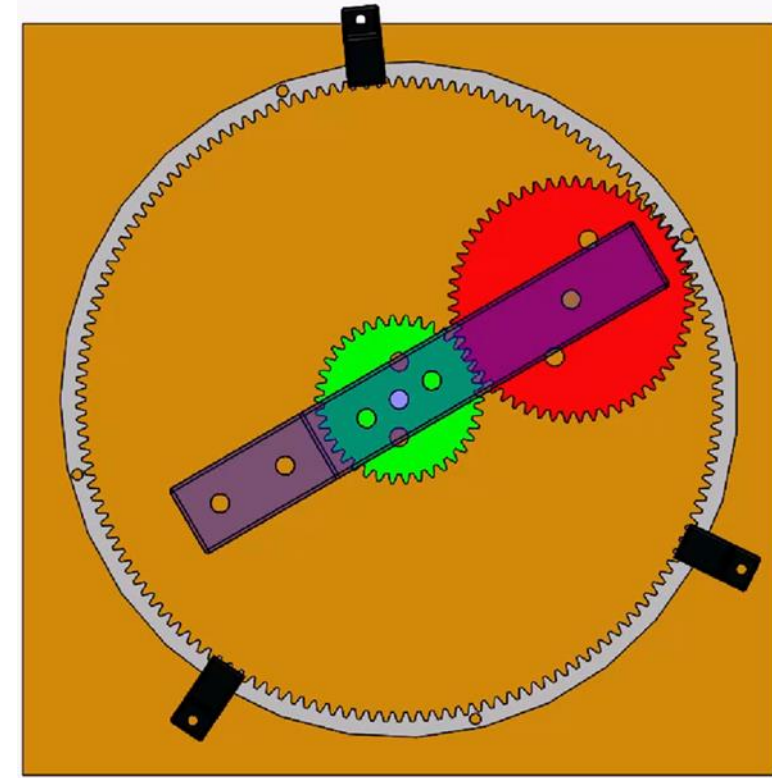
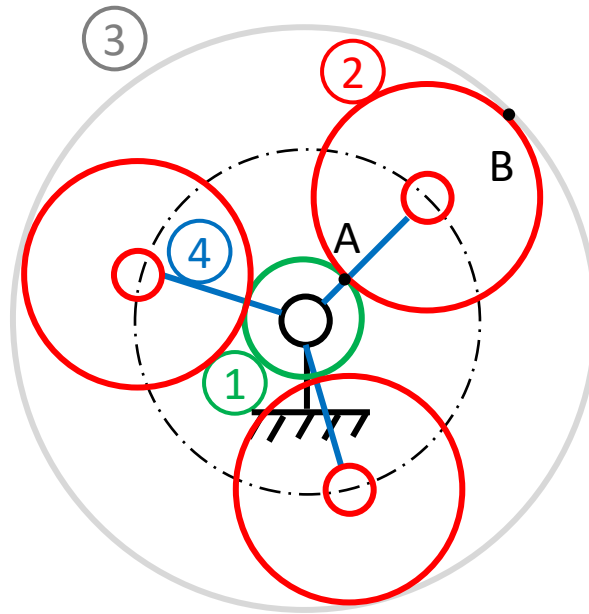
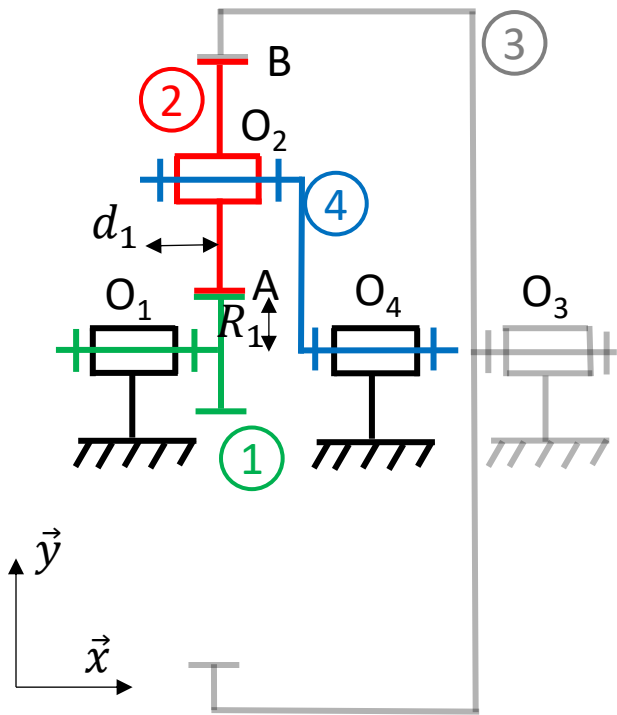
RSG en A entre 2 et 1 :

$$\overrightarrow{V(A \in 4/0)} = \overrightarrow{V(O_4 \in 4/0)} + \overrightarrow{AO_4} \wedge \overrightarrow{\Omega_{40}}$$

$$\overrightarrow{V(A \in 4/0)} = \vec{0} + (-R_1 \cdot \vec{y} + d_4 \cdot \vec{x}) \wedge \omega_{40} \vec{x} = \mathbf{R}_1 \cdot \omega_{40} \vec{z}$$

$$\overrightarrow{V(A \in 2/4)} + \overrightarrow{V(A \in 4/0)} = \overrightarrow{V(A \in 1/0)}$$

BABAR au point O_4



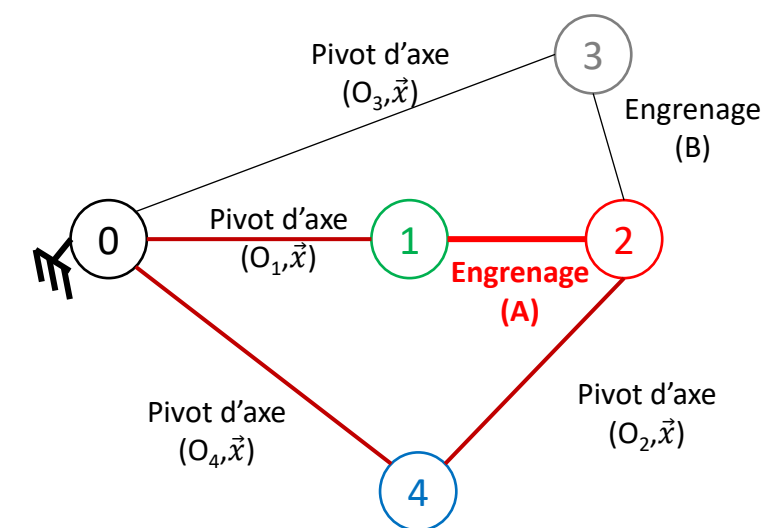
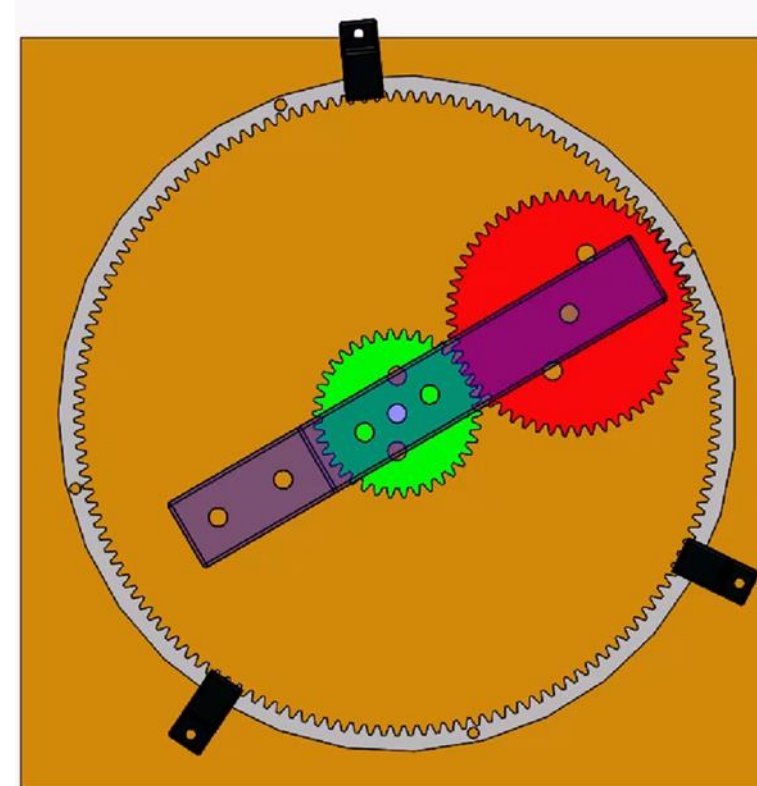
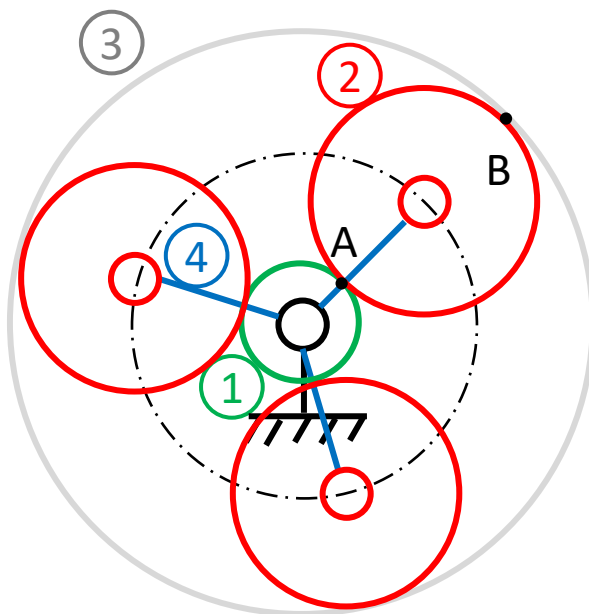
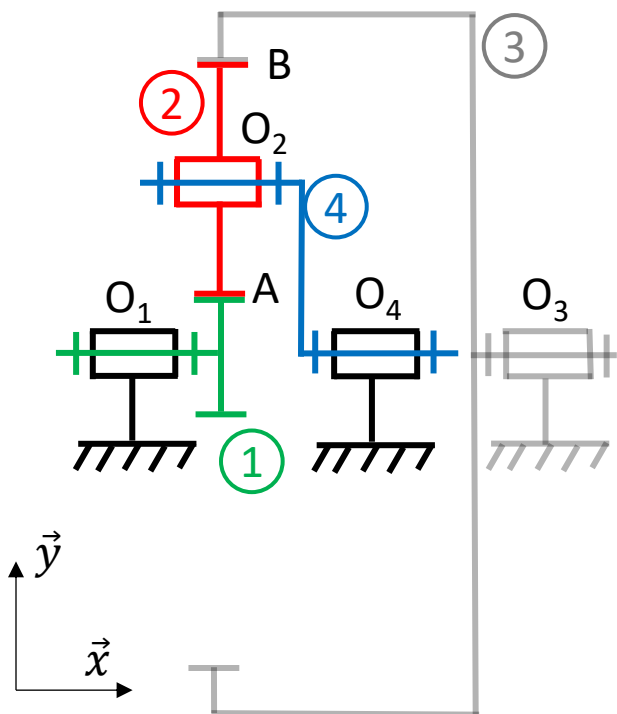
RSG en A entre 2 et 1 :

$$\overrightarrow{V(A \in 1/0)} = \overrightarrow{V(O_1 \in 1/0)} + \overrightarrow{AO_1} \wedge \overrightarrow{\Omega_{10}}$$

$$\overrightarrow{V(A \in 1/0)} = \vec{0} + (-R_1 \cdot \vec{y} - d_1 \cdot \vec{x}) \wedge \omega_{10} \vec{x} = \mathbf{R}_1 \cdot \omega_{10} \vec{z}$$

$$\overrightarrow{V(A \in 2/4)} + \overrightarrow{V(A \in 4/0)} = \overrightarrow{V(A \in 1/0)}$$

BABAR au point O_1



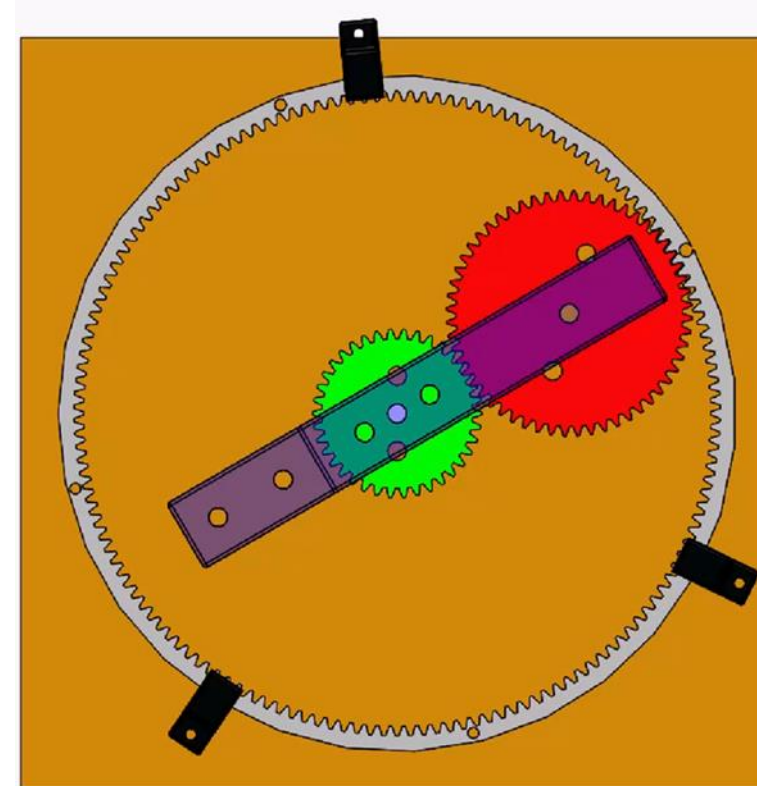
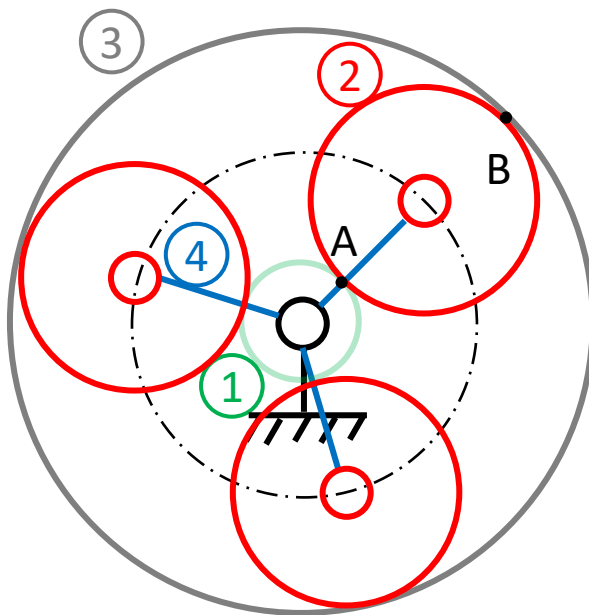
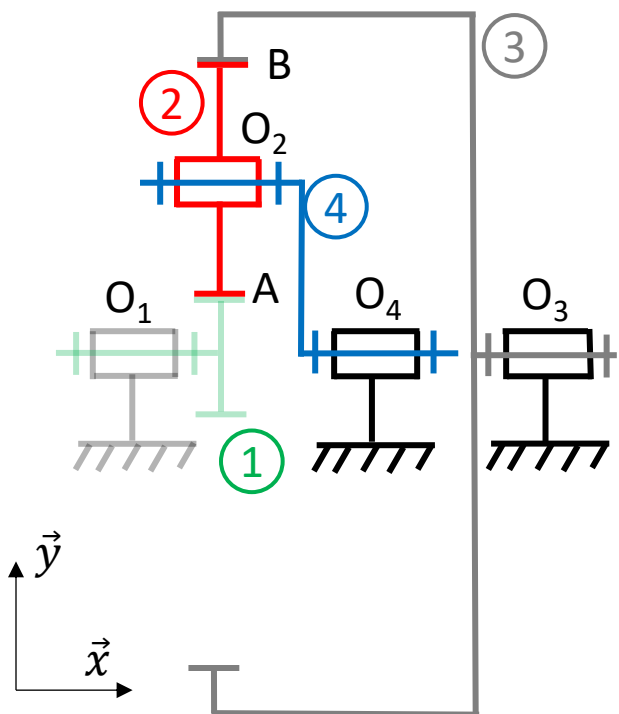
RSG en A entre 2 et 1 :

$$\overrightarrow{V(A \in 2/4)} + \overrightarrow{V(A \in 4/0)} = \overrightarrow{V(A \in 1/0)}$$

Donc
$$-R_2 \cdot \omega_{24} \vec{Z} + R_1 \cdot \omega_{40} \vec{Z} = R_1 \cdot \omega_{10} \vec{Z}$$

En projetant sur $\vec{Z}$, on obtient :

$$-R_2 \cdot \omega_{24} + R_1 \cdot \omega_{40} = R_1 \cdot \omega_{10} \quad (1)$$



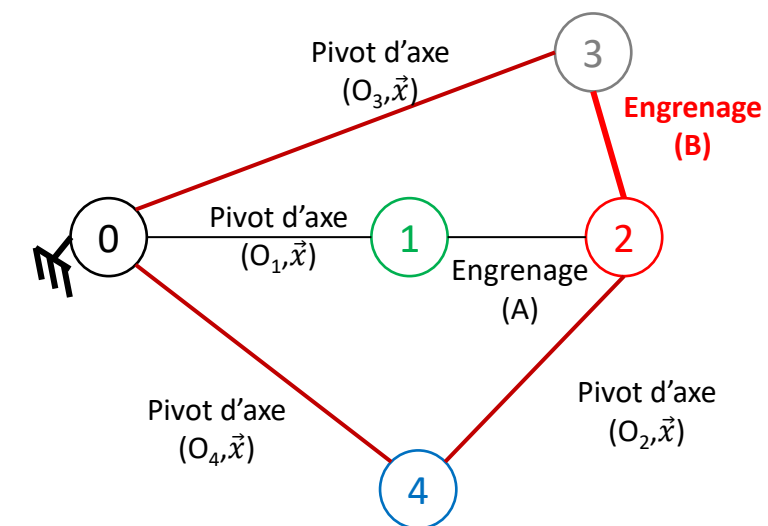
RSG en B entre 2 et 3 :

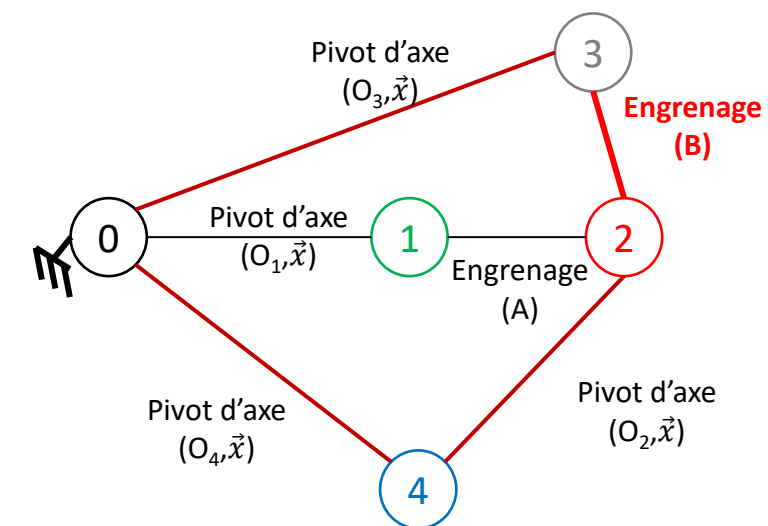
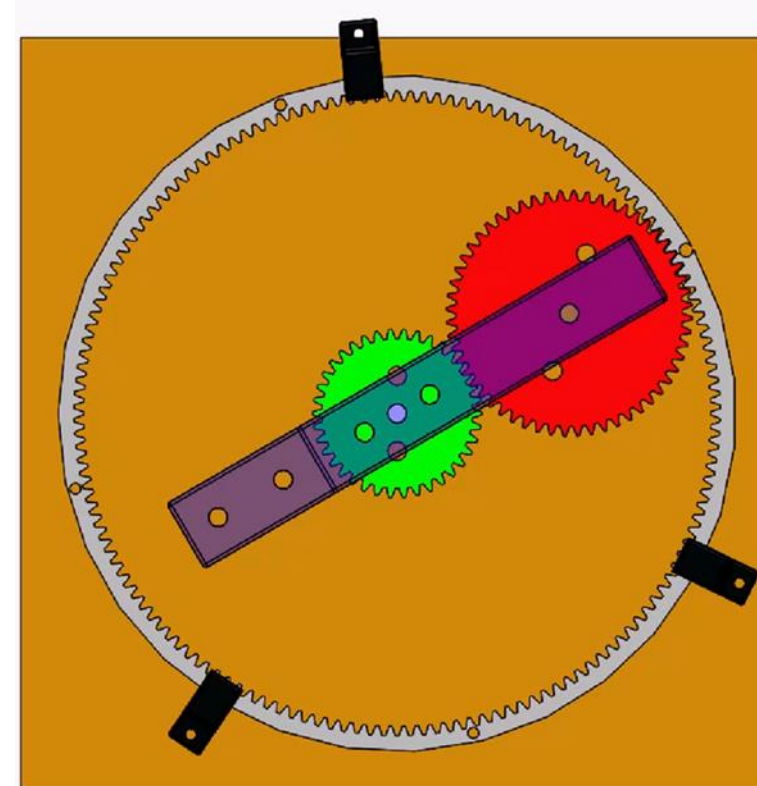
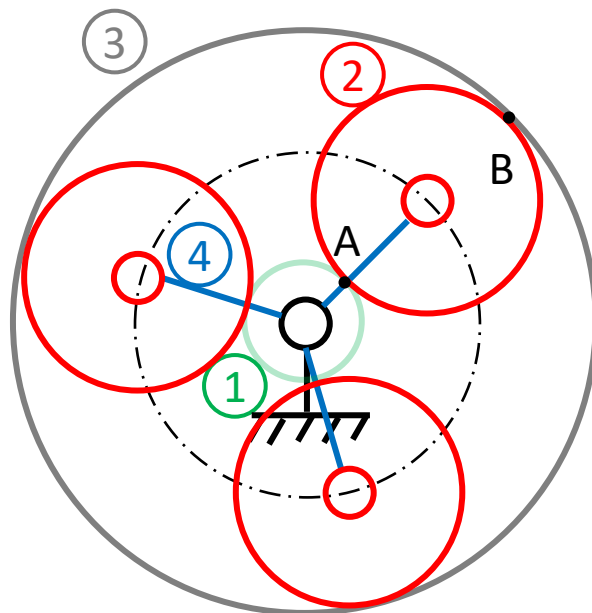
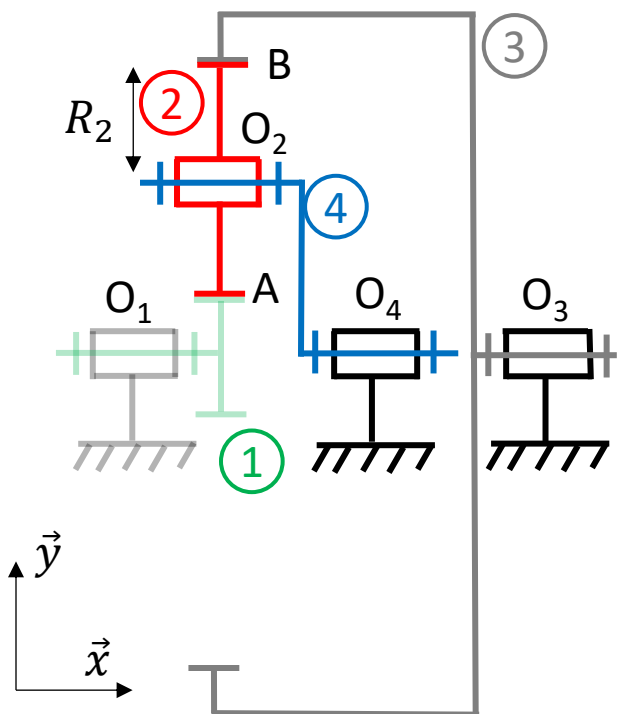
$$\overrightarrow{V(B \in 2/3)} = \vec{0} \quad \text{Or } \overrightarrow{V(B \in 2/3)} = \overrightarrow{V(B \in 2/0)} + \overrightarrow{V(B \in 0/3)} = \vec{0}$$

$$\text{Donc } \overrightarrow{V(B \in 2/0)} = \overrightarrow{V(B \in 3/0)}$$

$$\text{Or } \overrightarrow{V(B \in 2/0)} = \overrightarrow{V(B \in 2/4)} + \overrightarrow{V(B \in 4/0)}$$

$$\text{Donc } \overrightarrow{V(B \in 2/4)} + \overrightarrow{V(B \in 4/0)} = \overrightarrow{V(B \in 3/0)}$$





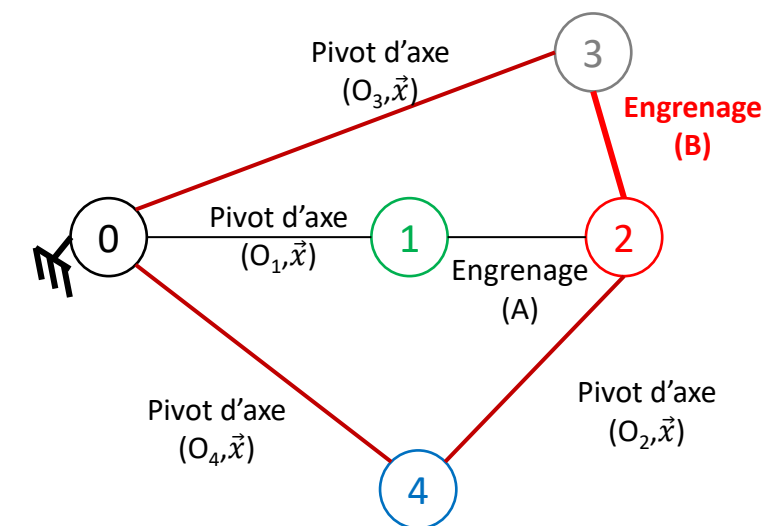
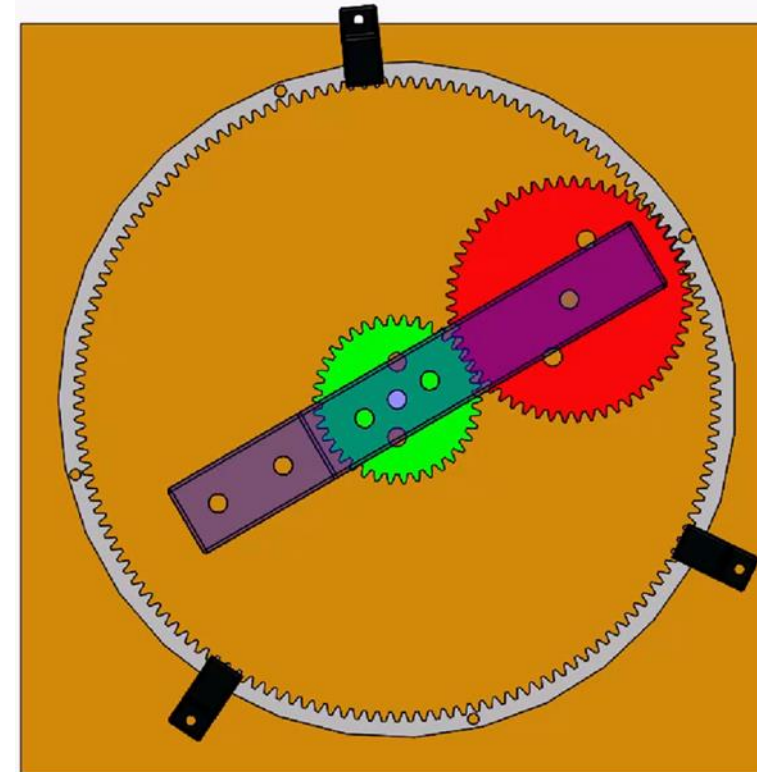
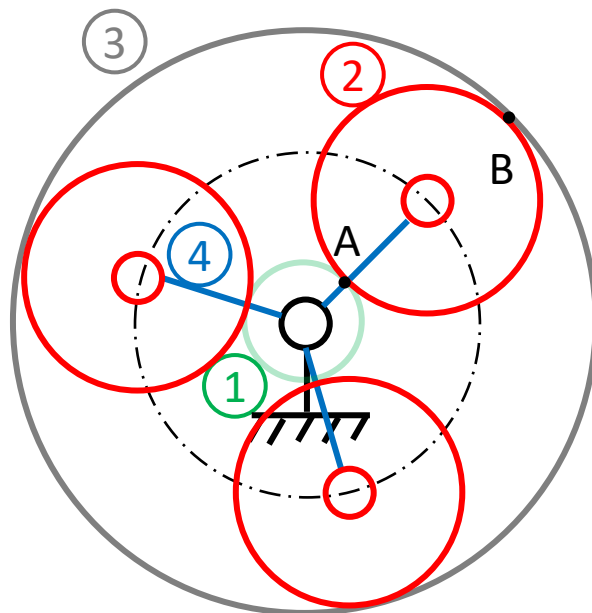
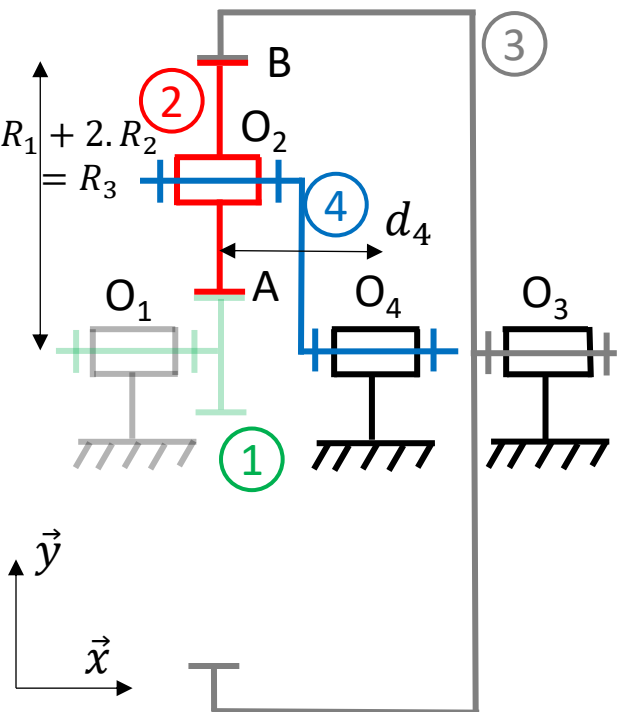
RSG en B entre 2 et 3 :

$$\overrightarrow{V(B \in 2/4)} = \overrightarrow{V(O_2 \in 2/4)} + \overrightarrow{BO_2} \wedge \overrightarrow{\Omega_{24}}$$

$$\overrightarrow{V(B \in 2/4)} = \vec{0} - R_2 \cdot \vec{y} \wedge \omega_{24} \vec{x} = +R_2 \cdot \omega_{24} \vec{z}$$

$$\overrightarrow{V(B \in 2/4)} + \overrightarrow{V(B \in 4/0)} = \overrightarrow{V(B \in 3/0)}$$

BABAR au point O₂



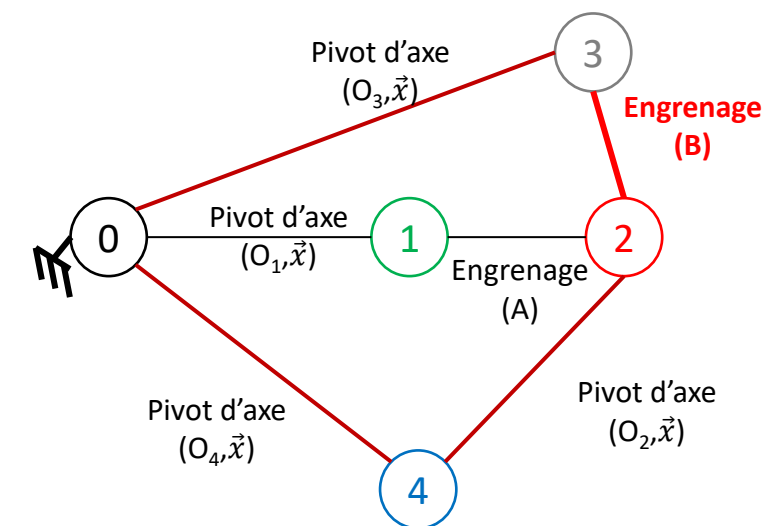
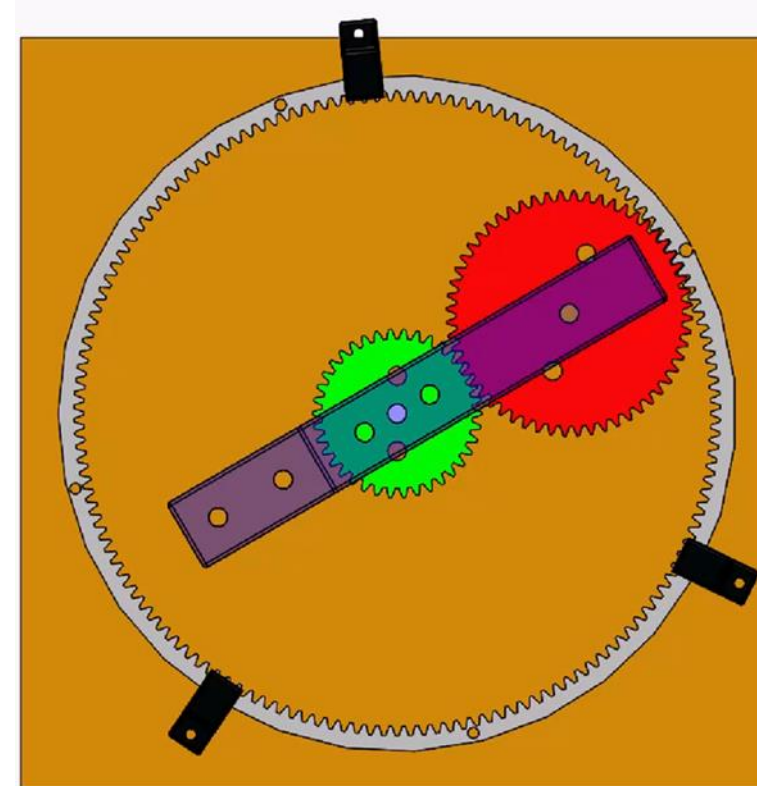
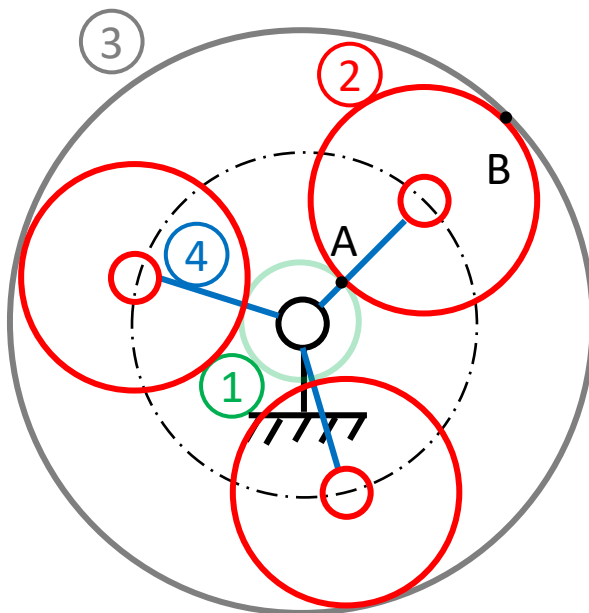
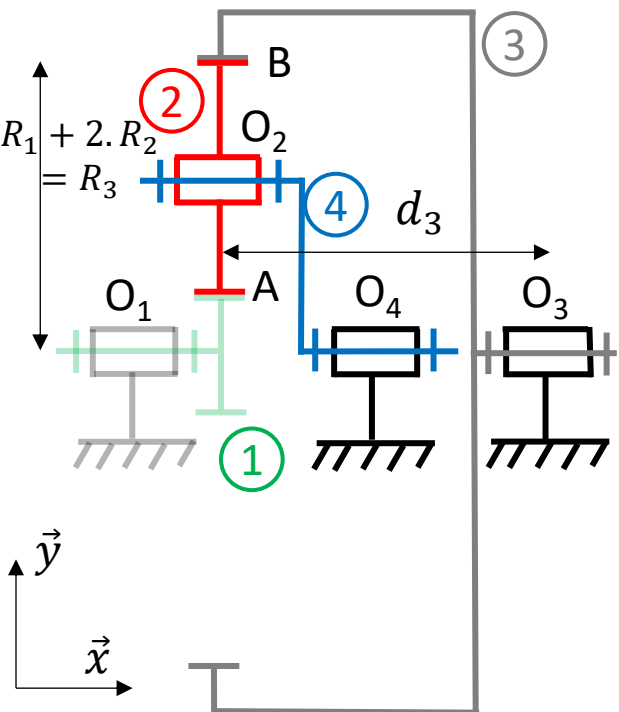
RSG en B entre 2 et 3 :

$$\overrightarrow{V(B \in 4/0)} = \overrightarrow{V(O_4 \in 4/0)} + \overrightarrow{BO_4} \wedge \overrightarrow{\Omega_{40}}$$

$$\overrightarrow{V(B \in 4/0)} = \vec{0} + (-R_3 \cdot \vec{y} + d_4 \cdot \vec{x}) \wedge \omega_{40} \vec{x} = R_3 \cdot \omega_{40} \vec{z}$$

$$\overrightarrow{V(B \in 2/4)} + \overrightarrow{V(B \in 4/0)} = \overrightarrow{V(B \in 3/0)}$$

BABAR au point O_4



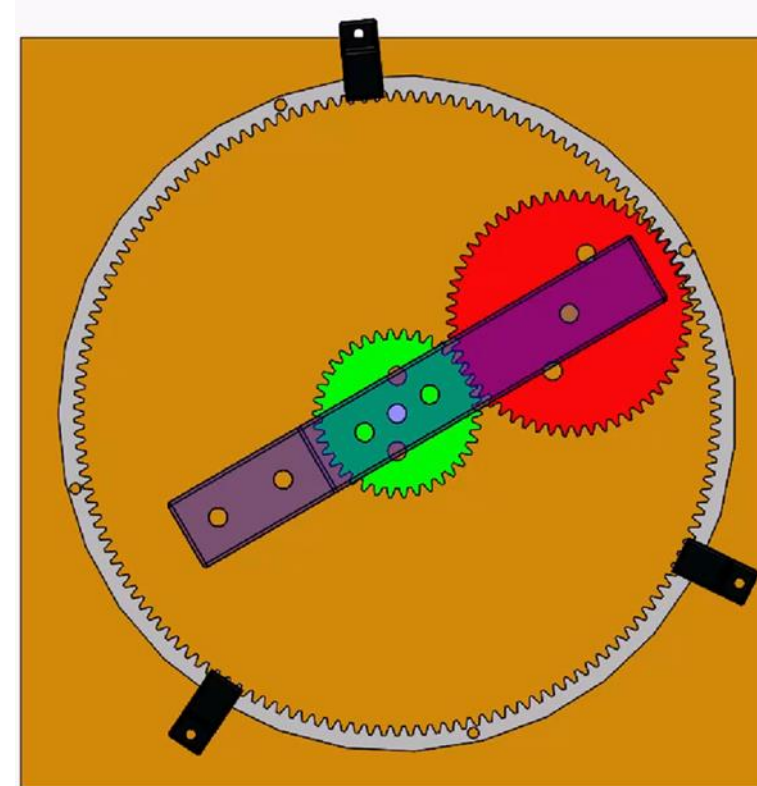
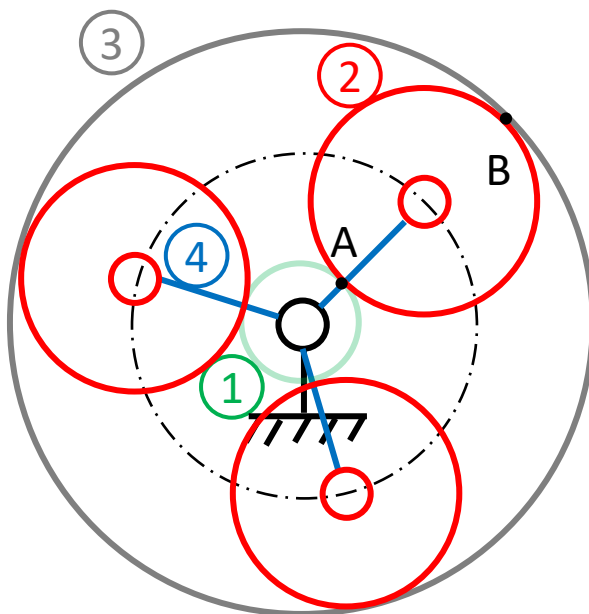
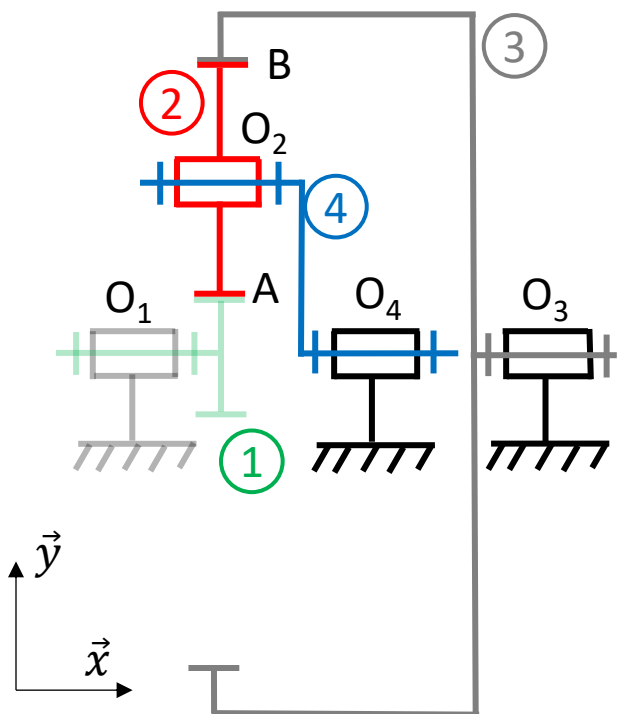
RSG en B entre 2 et 3 :

$$\overrightarrow{V(B \in 3/0)} = \overrightarrow{V(O_3 \in 3/0)} + \overrightarrow{BO_3} \wedge \overrightarrow{\Omega_{30}}$$

$$\overrightarrow{V(B \in 3/0)} = \vec{0} + (-R_3 \cdot \vec{y} + d_3 \cdot \vec{x}) \wedge \omega_{30} \vec{x} = R_3 \cdot \omega_{30} \vec{z}$$

$$\overrightarrow{V(B \in 2/4)} + \overrightarrow{V(B \in 4/0)} = \overrightarrow{V(B \in 3/0)}$$

BABAR au point O_3



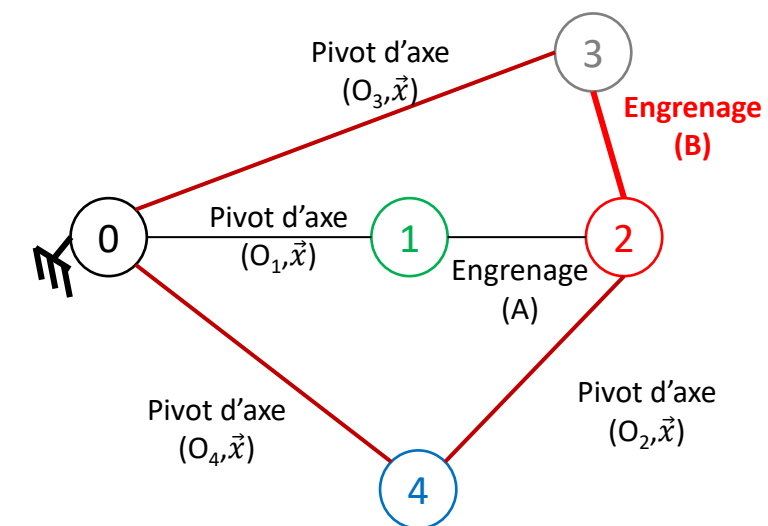
RSG en B entre 2 et 3 :

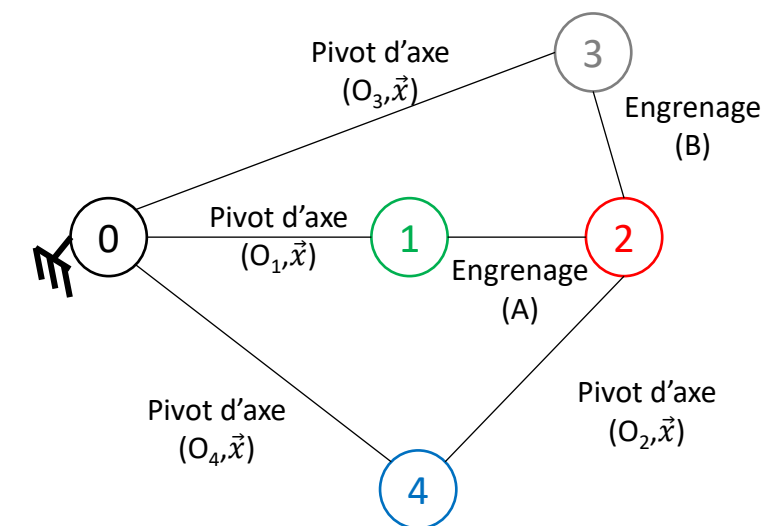
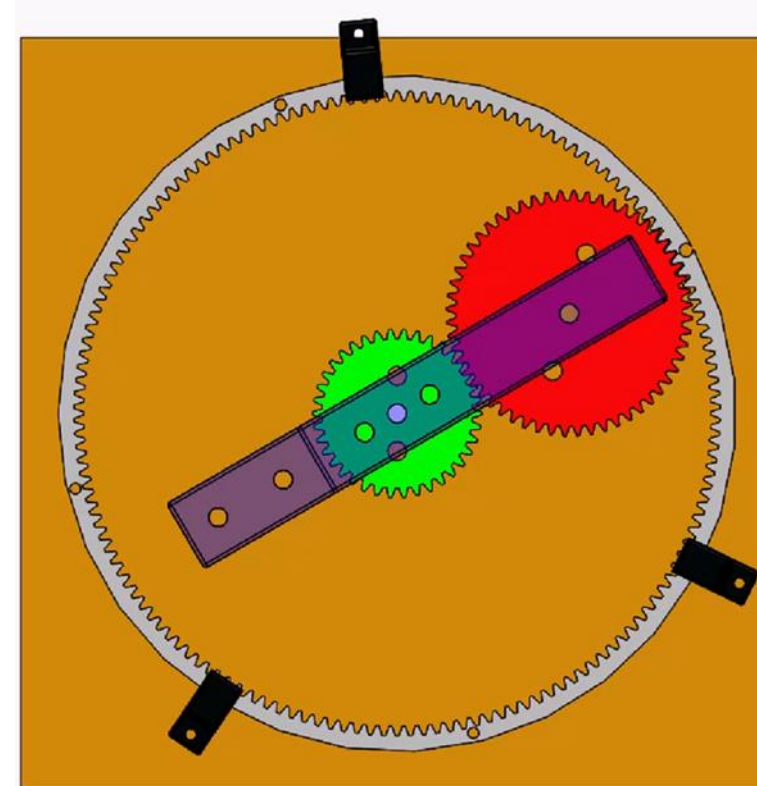
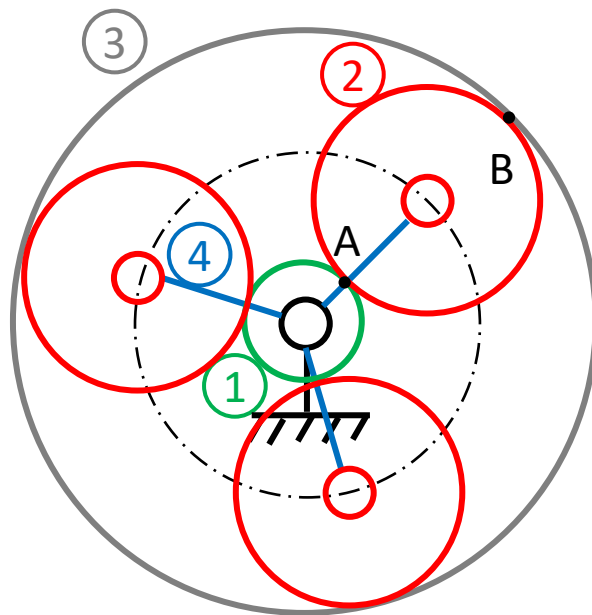
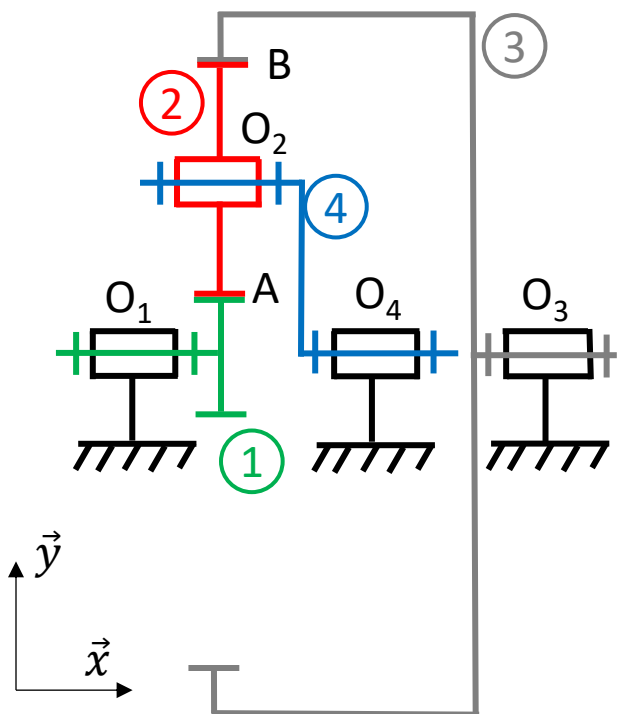
$$\overrightarrow{V(B \in 2/4)} + \overrightarrow{V(B \in 4/0)} = \overrightarrow{V(B \in 3/0)}$$

Donc $R_2 \cdot \omega_{24} \vec{Z} + R_3 \cdot \omega_{40} \vec{Z} = R_3 \cdot \omega_{30} \vec{Z}$

En projetant sur $\vec{Z}$, on obtient :

$$R_2 \cdot \omega_{24} + R_3 \cdot \omega_{40} = R_3 \cdot \omega_{30} \quad (2)$$





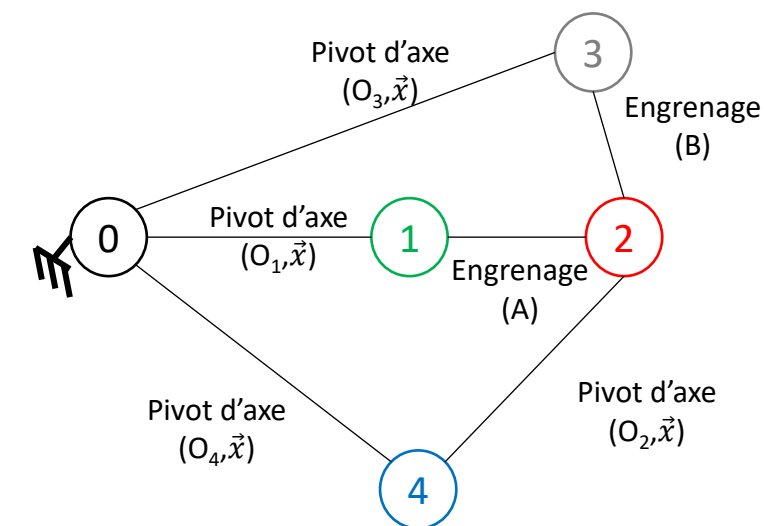
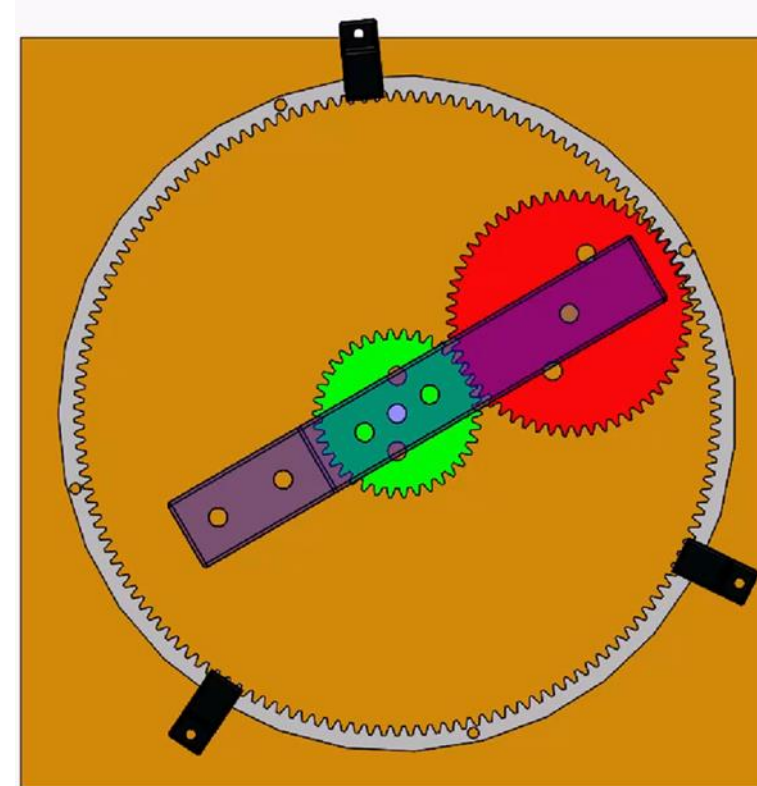
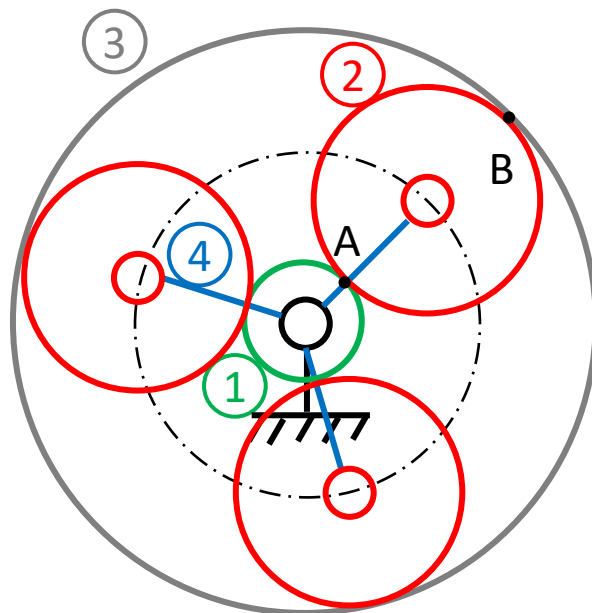
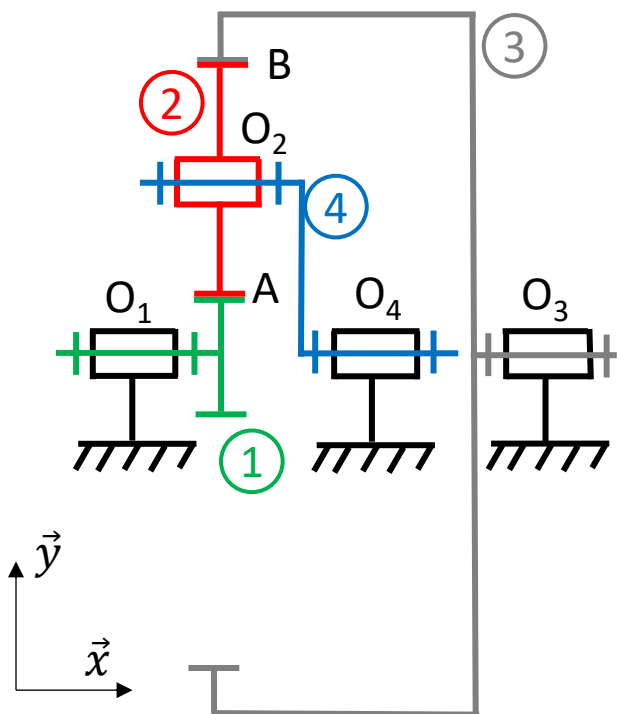
$$-R_2 \cdot \omega_{24} + R_1 \cdot \omega_{40} = R_1 \cdot \omega_{10} \quad (1)$$

$$R_2 \cdot \omega_{24} + R_3 \cdot \omega_{40} = R_3 \cdot \omega_{30} \quad (2)$$

On souhaite une relation entre ω_{10} , ω_{30} et ω_{40}

On fait donc disparaître le terme ω_{24} en ajoutant (1)+(2)

$$R_1 \cdot \omega_{40} + R_3 \cdot \omega_{40} = R_1 \cdot \omega_{10} + R_3 \cdot \omega_{30}$$



$$R_1 \cdot \omega_{40} + R_3 \cdot \omega_{40} = R_1 \cdot \omega_{10} + R_3 \cdot \omega_{30}$$

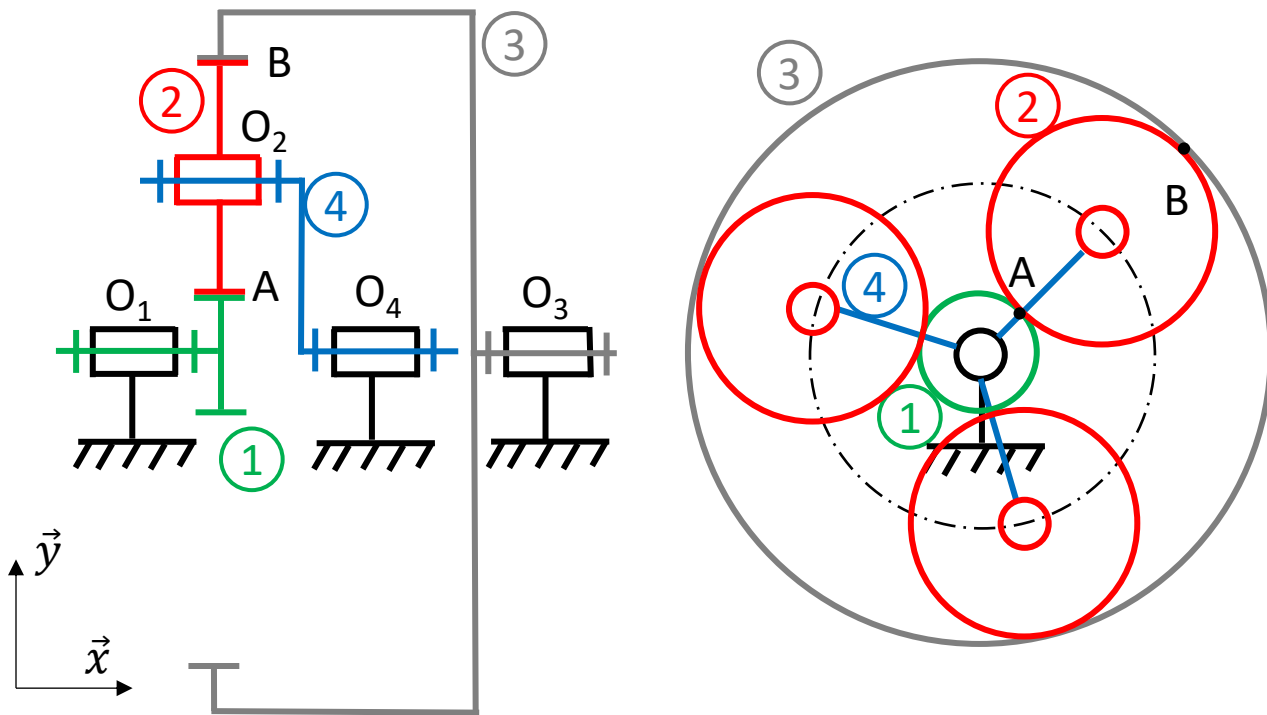
$$-R_3 \cdot \omega_{30} + R_3 \cdot \omega_{40} = R_1 \cdot \omega_{10} - R_1 \cdot \omega_{40}$$

D'où

$$-R_3 \cdot (\omega_{30} - \omega_{40}) = R_1 \cdot (\omega_{10} - \omega_{40})$$

Donc

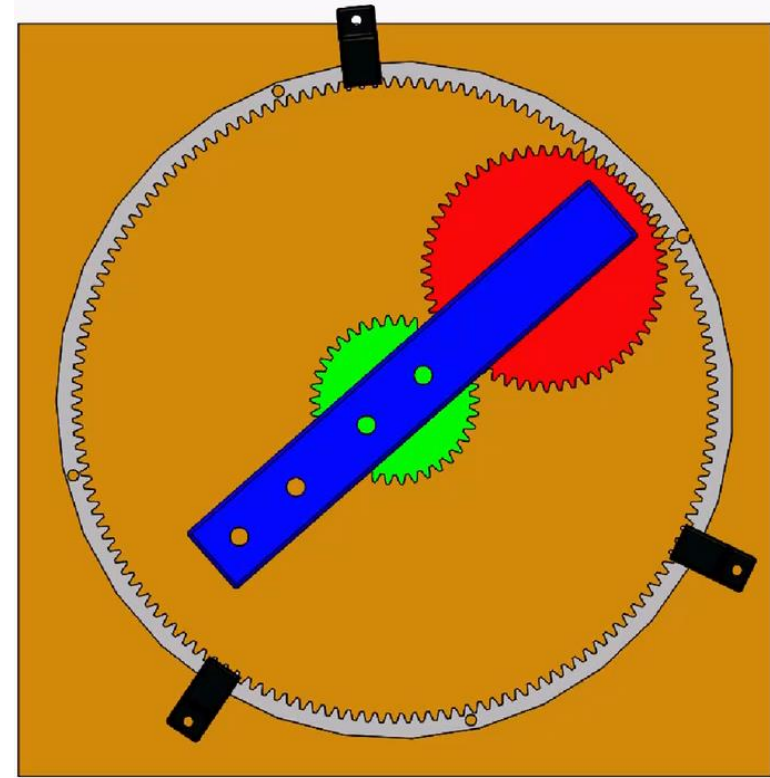
$$\frac{\omega_{10} - \omega_{40}}{\omega_{30} - \omega_{40}} = -\frac{R_3}{R_1} = -\frac{Z_3}{Z_1}$$

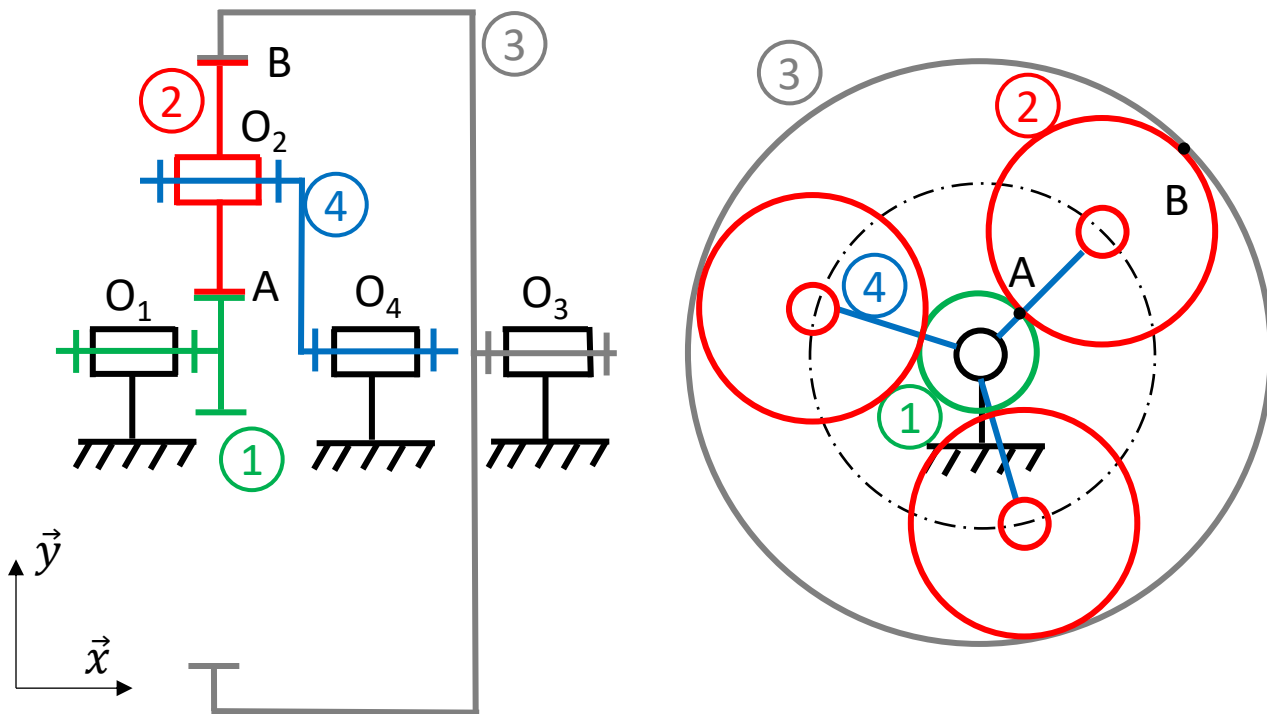


FORMULE DE WILLIS

On se place sur le **PORTE-SATELLITE (4)**

Dans ce cas, les engrenages entre (1) et (2) en A et (2) et (3) en B sont des engrenages classiques





FORMULE DE WILLIS

On se place sur le **PORTE-SATELLITE (4)**

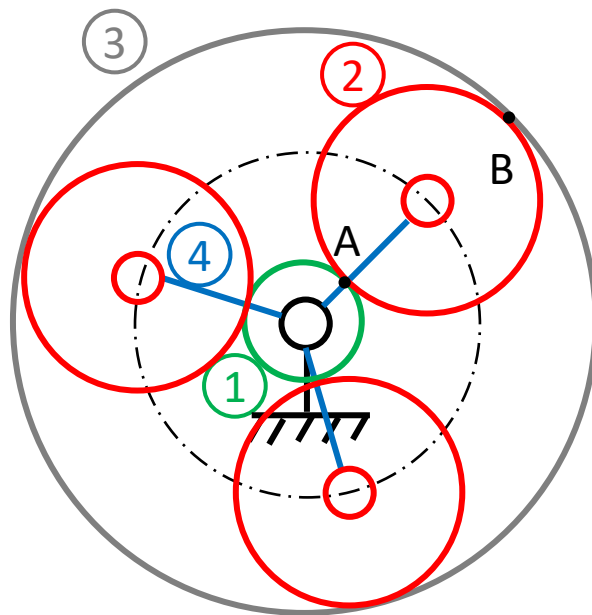
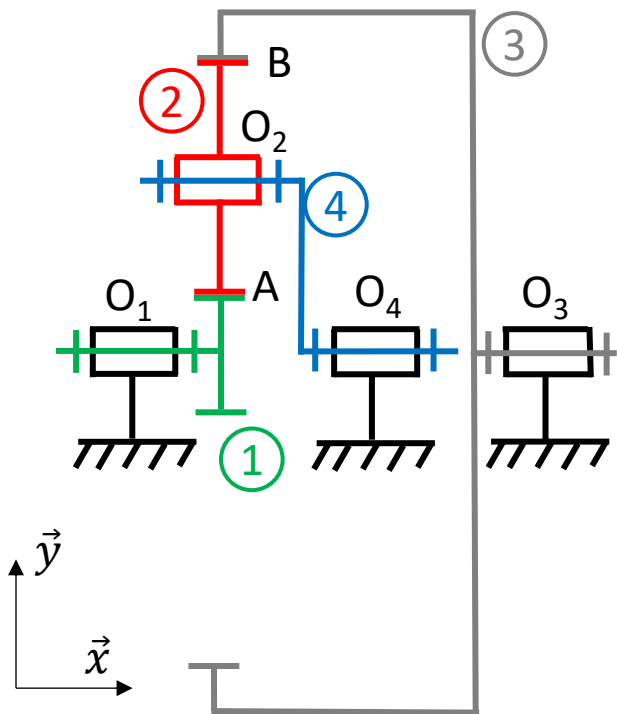
Dans ce cas, les engrenages entre (1) et (2) en A et (2) et (3) en B sont des engrenages classiques

En A :

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{R_2}{R_1} \quad (\text{Contact EXTERIEUR})$$

Or, pour obtenir cette relation, on s'est placé sur le **PORTE-SATELLITE (4)**

$$\frac{\omega_{1/4}}{\omega_{2/4}} = -\frac{R_2}{R_1}$$



FORMULE DE WILLIS

On se place sur le **PORTE-SATELLITE (4)**

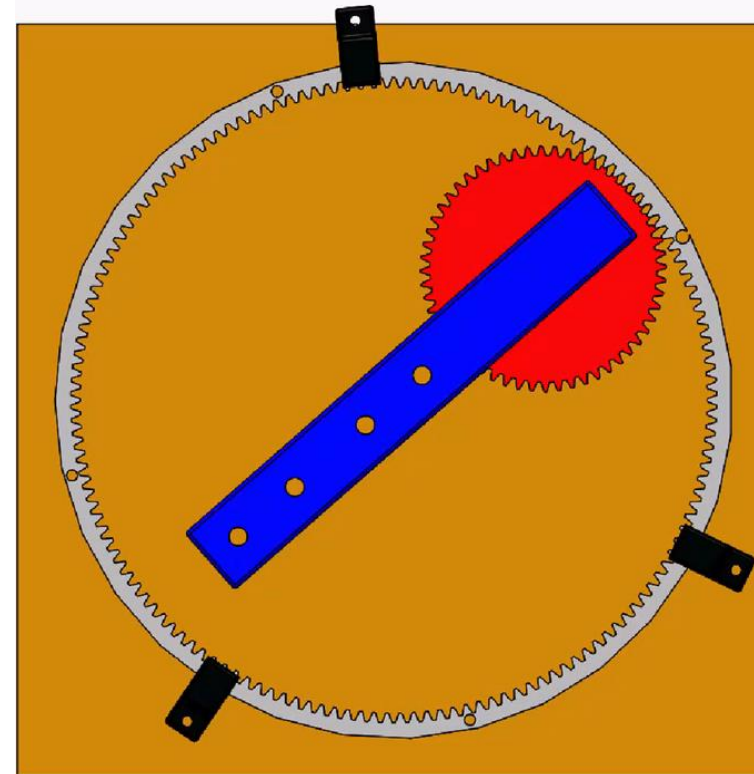
Dans ce cas, les engrenages entre (1) et (2) en A et (2) et (3) en B sont des engrenages classiques

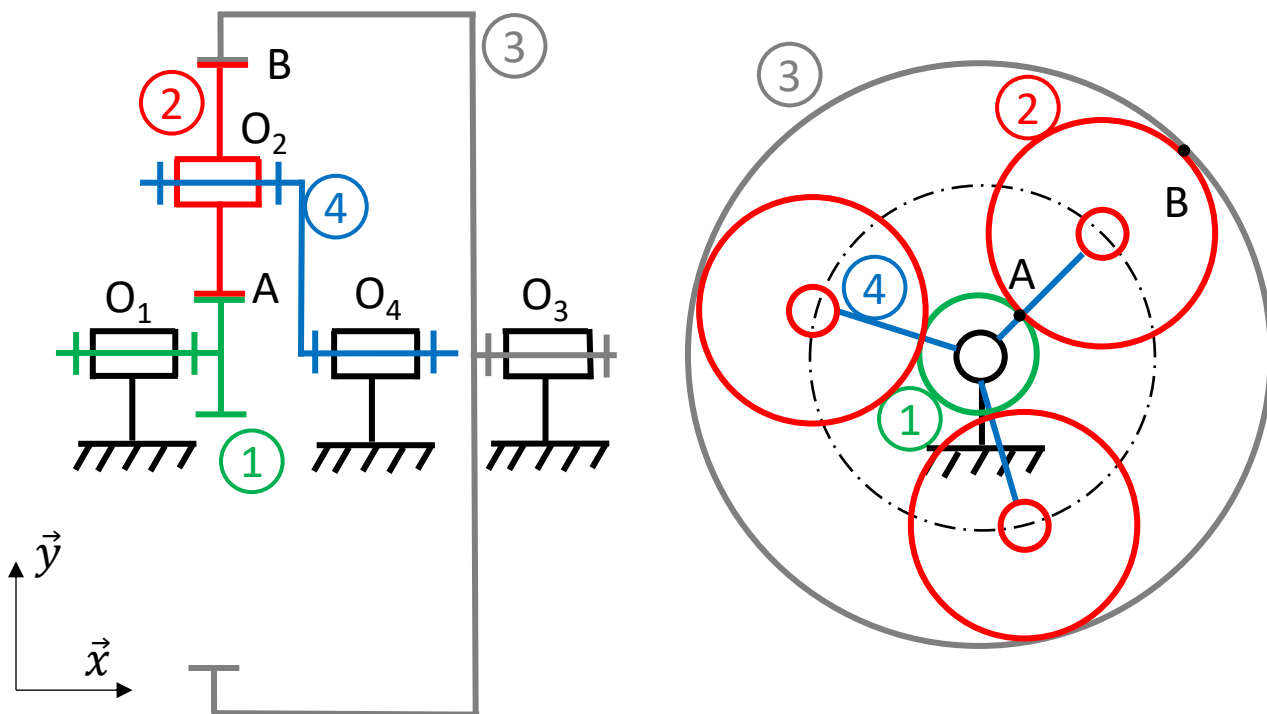
En B :

$$\frac{\omega_2}{\omega_3} = + \frac{R_3}{R_2} \quad (\text{Contact INTERIEUR})$$

Or, pour obtenir cette relation, on s'est placé sur le **PORTE-SATELLITE (4)**

$$\frac{\omega_{2/4}}{\omega_{3/4}} = \frac{R_3}{R_2}$$





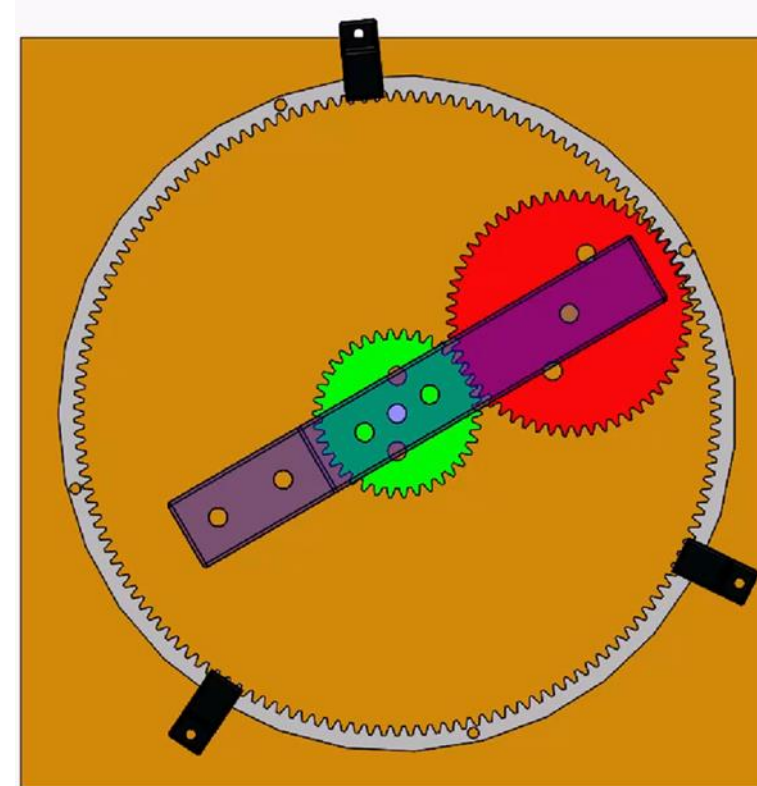
FORMULE DE WILLIS

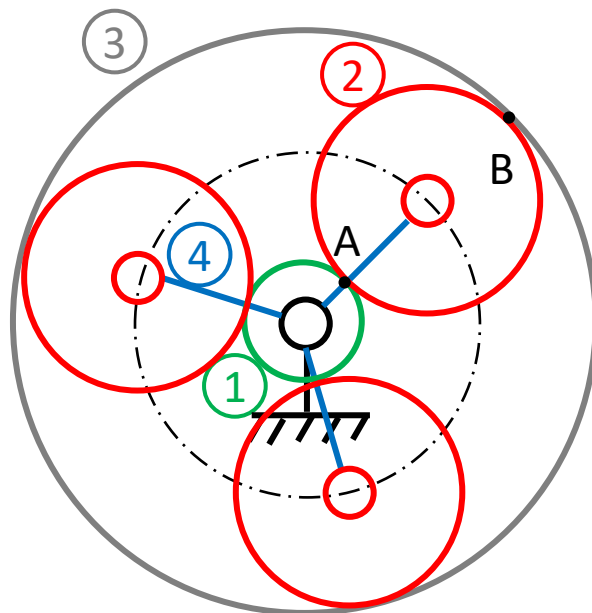
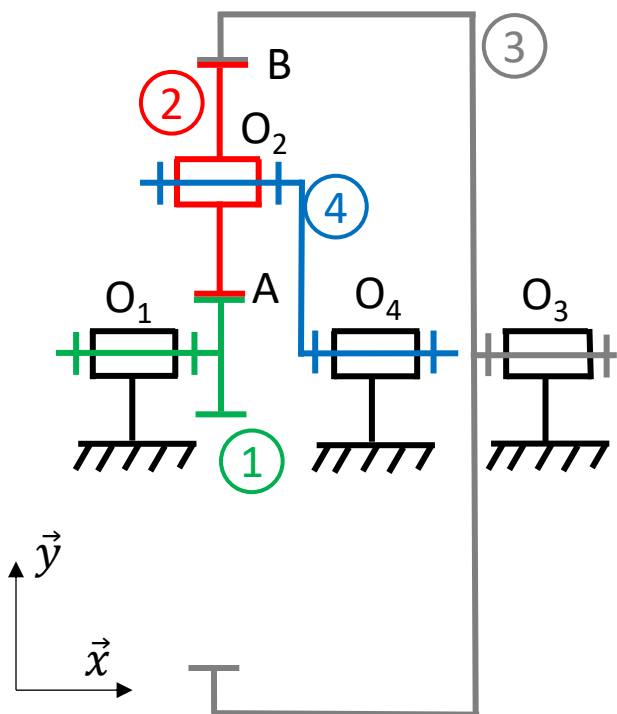
On se place sur le **PORTE-SATELLITE (4)**

Dans ce cas, les engrenages entre (1) et (2) en A et (2) et (3) en B sont des engrenages classiques

On souhaite une relation entre $\omega_{1/4}$ et $\omega_{3/4}$

$$\frac{\omega_{1/4}}{\omega_{3/4}} = -\frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{R_3}{R_2} = -\frac{R_3}{R_1}$$

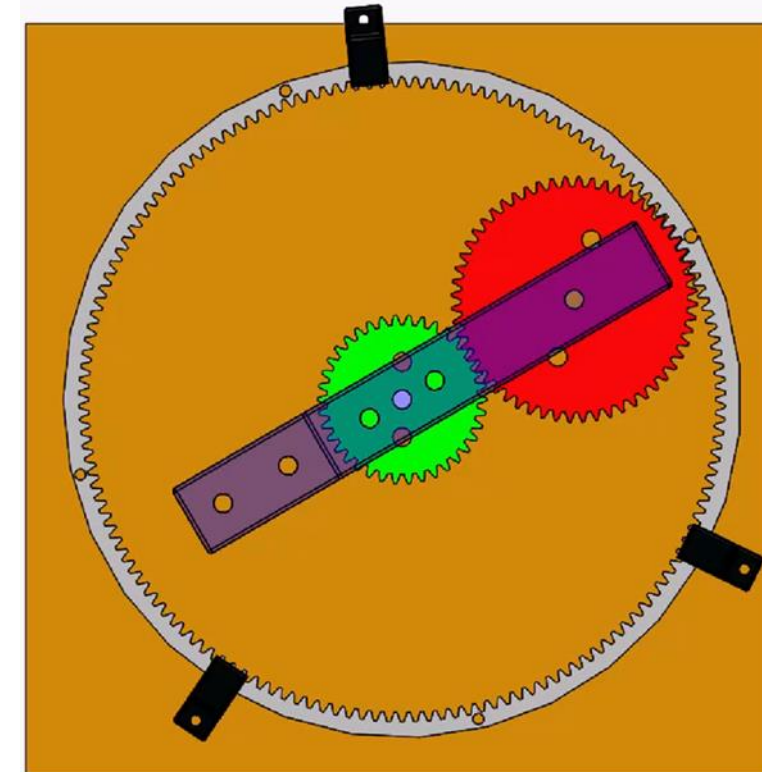




FORMULE DE WILLIS

On se place sur le **PORTE-SATELLITE (4)**

Dans ce cas, les engrenages entre (1) et (2) en A et (2) et (3) en B sont des engrenages classiques



Composition de mouvements :

$$1/4 = 1/0 + 0/4 \quad \text{et} \quad 3/4 = 3/0 + 0/4$$

$$\omega_{1/4} = \omega_{1/0} + \omega_{0/4} = \omega_{1/0} - \omega_{4/0}$$

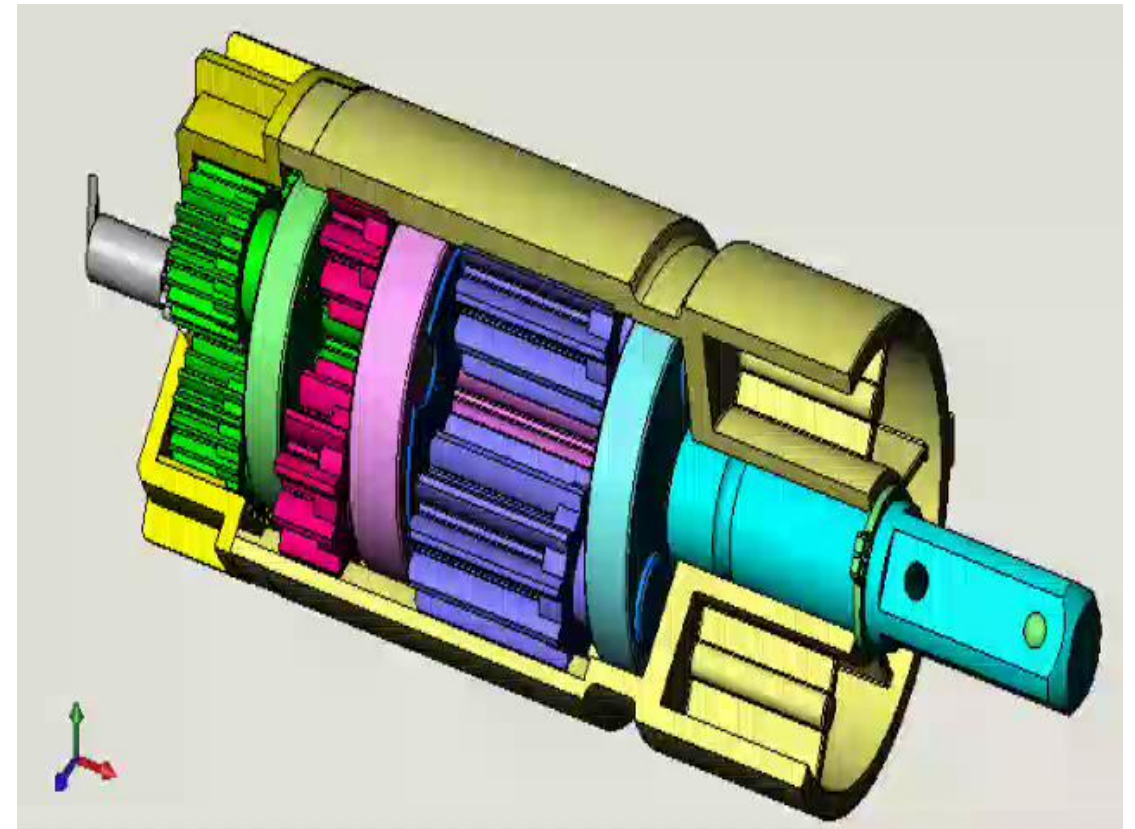
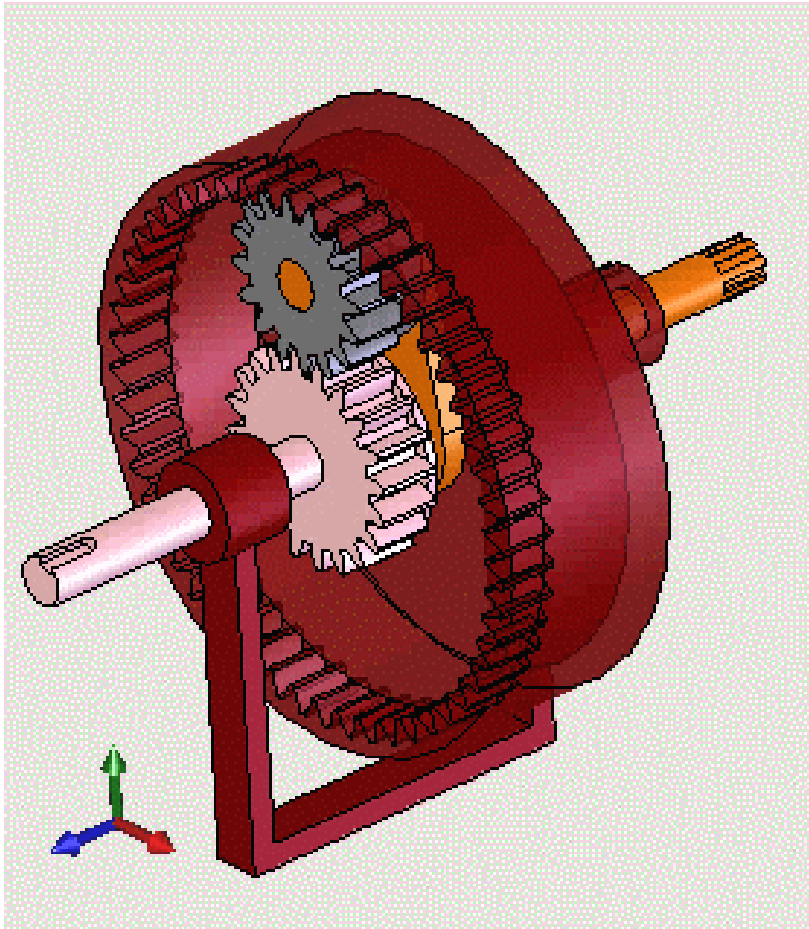
$$\omega_{3/4} = \omega_{3/0} + \omega_{0/4} = \omega_{3/0} - \omega_{4/0}$$

Donc

$$\frac{\omega_{10} - \omega_{40}}{\omega_{30} - \omega_{40}} = -\frac{R_3}{R_1} = -\frac{Z_3}{Z_1}$$

Contact ponctuel / RSG : ENGRENAGES

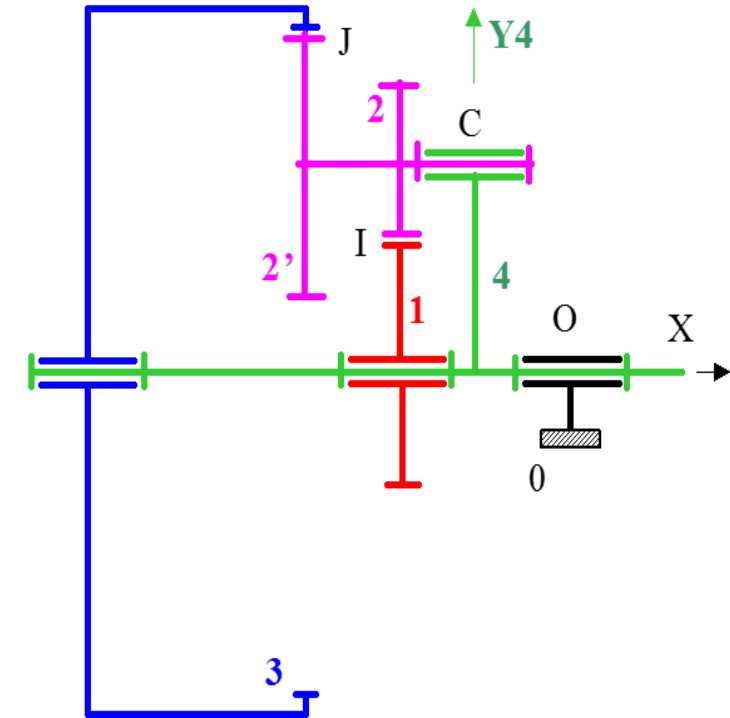
Trains épicycloïdaux



Contact ponctuel / RSG : ENGRENAGES

Trains épicycloïdaux

- Référentiel de base le porte-satellite 4.
- Train épicycloïdal $\approx$ 2 deux trains simples.



$$\left(\begin{array}{l} \frac{\omega_{24}}{\omega_{14}} = -\frac{R_1}{R_2} \\ \frac{\omega_{34}}{\omega_{2/4}} = \frac{R'_2}{R_3} \end{array} \right) \rightarrow \frac{\omega_{34}}{\omega_{14}} = -\frac{R_1 \cdot R'_2}{R_2 \cdot R_3} = -\frac{Z_1 \cdot Z'_2}{Z_2 \cdot Z_3}$$

Contact ponctuel / RSG : ENGRENAGES

Trains épicycloïdaux

Composition de mouvements : $3/4 = 3/0 + 0/4$ et $1/4 = 1/0 + 0/4$:

$$\frac{\omega_{30} - \omega_{40}}{\omega_{10} - \omega_{40}} = - \frac{Z_1 \cdot Z'_2}{Z_2 \cdot Z_3}$$

